

88 1. Les six faces de chaque dé sont équiprobables.

Le premier dé comporte trois faces numérotées «1» et trois faces numérotées «2», donc

$$P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Pour le second dé, on a $P(Y = 0) = \frac{1}{6}$, $P(Y = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, et $P(Y = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2. L'événement $\{Z = 1\}$ est constitué de l'unique issue $\{X = 1 \text{ et } Y = 0\}$ donc

$$P(Z = 1) = P(X = 1 \text{ et } Y = 0).$$

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes,

$$\text{donc } P(X = 1 \text{ et } Y = 0) = P(X = 1) \times P(Y = 0) \text{ donc } P(Z = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

L'événement $\{Z = 4\}$ est constitué de l'unique issue $\{X = 2 \text{ et } Y = 2\}$.

$$\text{Comme précédemment, } P(Z = 4) = P(X = 2) \times P(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

3. L'événement $\{Z = 2\}$ est obtenu si $X = 2$ et $Y = 0$ ou bien si $X = 1$ et $Y = 1$.

On a donc :

$$\begin{aligned} P(Z = 2) &= P(X = 2 \text{ et } Y = 0) + P(X = 1 \text{ et } Y = 1) \\ &= P(X = 2) \times P(Y = 0) + P(X = 1) \times P(Y = 1) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y. \end{aligned}$$

$$\text{Avec les lois de } X \text{ et } Y \text{ on trouve } P(Z = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}.$$

4. La variable aléatoire Z pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3 et 4, il manque $P(Z = 3)$.

On obtient cette valeur par la relation :

$$1 = P(Z = 1) + P(Z = 2) + P(Z = 3) + P(Z = 4) \quad \text{qui donne :}$$

$$P(Z = 3) = 1 - P(Z = 1) - P(Z = 2) - P(Z = 4) = 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12}.$$

La loi de Z est donnée par le tableau suivant :

z_i	1	2	3	4
$P(Z = z_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$