98 **1.** On a :

$E(B) = 0 \times P(B = 0) + 1 \times P(B = 1) + 2 \times P(B = 2) + 3 \times P(B = 3)$

$\quad = 0 \times 0{,}2 + 1 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}3 + 3 \times 0{,}1$

$\quad = 1{,}3$

et $V(B) = (0 - E(B))^2 \times P(B = 0) + (1 - E(B))^2 \times P(B = 1) + (2 - E(B))^2 \times P(B = 2) + (3 - E(B))^2 \times P(B = 3)$ soit

$V(B) = (-1{,}3)^2 \times 0{,}2 + (-0{,}3)^2 \times 0{,}4 + 0{,}7^2 \times 0{,}3 + 1{,}7^2 \times 0{,}1 = 0{,}81$.

2. a. L'inégalité de concentration relative à M_n s'écrit, pour tout entier naturel non nul n et tout nombre réel strictement positif δ, $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$, où $\mu = E(B) = 1{,}3$ et $V = V(B) = 0{,}81$.

b. Avec $\delta = 0{,}3$, l'inégalité de la question précédente s'écrit :

$P(|M_n - 1{,}3| \geq 0{,}3) \leq \frac{0{,}81}{n0{,}09}$,soit $P(|M_n - 1{,}3| \geq 0{,}3) \leq \frac{9}{n}$.

On a $P(|M_n - 1{,}3| \geq 0{,}3) + P(|M_n - 1{,}3| < 0{,}3) = 1$ car $\{|M_n - 1{,}3| \geq 0{,}3\}$ et $\{|M_n - 1{,}3| < 0{,}3\}$ sont des événements contraires.

Il vient $P(|M_n - 1{,}3| < 0{,}3) \geq 1 - P(|M_n - 1{,}3| \geq 0{,}3)$

soit $P(|M_n - 1{,}3| < 0{,}3) \geq 1 - \frac{9}{n}$.

*P*ar ailleurs, l'inégalité $|M_n - 1{,}3| < 0{,}3$ revient à $1 < M_n < 1{,}6$.

Ces inégalités entraînent $1 < M_n$ donc $P(|M_n - 1{,}3| < 0{,}3) \leq P(1 < M_n)$.

Ainsi $P(M_n > 1) \geq 1 - \frac{9}{n}$.

c. Il s'agit de trouver n tel que $P(M_n > 1) \geq 0{,}90$.

D'après la question précédente, il suffit de résoudre $1 - \frac{9}{n} \geq 0{,}9$.

Cette inégalité est équivalent à $0{,}1 \geq \frac{9}{n}$ donc, en passant à l'inverse, à $10 \leq \frac{n}{9}$ puis à $90 \leq n$. L'attaquant doit avoir joué au moins 90 matchs pour avoir marqué, en moyenne, plus d'un but par match avec une probabilité d'au moins 0,9.