Chapitre 12
Variables et lois des grands nombres

Revoir des points essentiels

99 La variable aléatoire Z est la somme de deux variables aléatoires, $X' = 2X$ et Y.
L'énoncé donne $E(Y)=30$.
Pour calculer $E(X')$, on utilise la formule de cours selon laquelle $E(aX) = a\,E(X)$ pour tout nombre réel a.
Ici, avec $a = 2$, on obtient $E(X') = E(2X) = 2E(X) = 2 \times 20 = 40$.
L'espérance de Z est donnée par la formule de cours $E(X' + Y) = E(X') + E(Y)$, valable pour toutes variables aléatoires X' et Y.
Ici $E(Z) = E(X' + Y) = E(X') + E(Y) = 40 + 30 = 70$.
L'énoncé donne ensuite $\sigma(Y) = 3$.
Comme $V(Y) = \sigma(Y)^2$, $V(Y) = 3^2 = 9$.
De plus $V(X') = V(2X)$.
On utilise en plus la formule de cours $V(aX) = a^2V(X)$ valable pour tout nombre réel a.
On a ainsi $V(X) = \sigma(X)^2 = 2^2 = 4$ et $V(X') = V(2X) = 2^2V(X) = 16$.
La variance de Z est obtenue avec la formule $V(X' + Y) = V(X') + V(Y)$, valable lorsque les variables aléatoires sont indépendantes.
Ici X et Y sont indépendantes, donc X' et Y aussi, on a donc :
$V(Z) = V(X') + V(Y) = 16 + 9 = 25$.
Finalement, $\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{25} = 5$.

100 On appelle A l'événement « la hauteur d'un platane adulte est strictement comprise entre 30 et 50 ». Il s'écrit $A = \{30 < X < 50\}$.
On doit démontrer l'inégalité suivante : $P(A) \geq 0{,}51$.
Comme $E(X) = 40$, on a $30 = E(X) - 10$ et $50 = E(X) + 10$, donc $A = \{|X - E(X)| < 10\}$.
L'événement contraire de A est $\overline{A} = \{|X - E(X)| \geq 10\}$.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à X s'écrit, pour tout réel strictement positif δ,
$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \dfrac{V(X)}{\delta^2}$.
Sachant que $V(X) = \sigma(X)^2 = 7^2 = 49$ et avec $\delta = 10$, on obtient $P(|X - E(X)| \geq 10) \leq \frac{49}{10^2}$
soit $P(\overline{A}) \leq 0{,}49$.
Comme $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, on obtient $P(A) \geq 1 - 0{,}49$ soit $P(A) \geq 0{,}51$.