SUJET B

1. Le rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{u}$ (a ; b ; c) est réfléchi par le plan (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).
Un vecteur directeur du rayon réfléchi est donc $\overrightarrow{u_1}$(a ; b ; $-c$) qui a une troisième coordonnée opposée à celle de $\vec{u}$.

Le rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$(a ; b ; $-c$) est réfléchi par le plan (O ; $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$).
Un vecteur directeur du rayon réfléchi est donc $\overrightarrow{u_2}$($-a$; b ; $-c$) qui a une première coordonnée opposée à celle de $\overrightarrow{u_1}$.

Le rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$($-a$; b ; $-c$) est réfléchi par le plan (O ; $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$).
Un vecteur directeur du rayon réfléchi est donc $\overrightarrow{u_3}$($-a$; $-b$; $-c$) qui a une deuxième coordonnée opposée à celle de $\overrightarrow{u_2}$.
Puisque $\overrightarrow{u_3} = -\vec{u}$, le rayon final est parallèle au rayon initial.

2. a. La droite d_2 passe par le point $I_1(2 ; 3 ; 0)$ et elle a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}$ $(-2 ; -1 ; 1)$.

Une représentation paramétrique de d_2 est donc $\begin{cases} x = 2 - 2\,t \\ y = 3 - \ t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. soit M un point du plan (O ; $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$). Il existe deux réels y et z tels que $\overrightarrow{OM} = y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$ donc $\overrightarrow{OM} = 0\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$. Puisque, l'abscisse de M dans le repère (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) est nulle, l'abscisse d'un point quelconque du plan (O ; $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) est nulle.

c. On a I_2 $(0 ; 2 ; 1)$.

Tout d'abord, l'abscisse de I_2 est nulle donc I_2 est un point du plan (O ; $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$).
De plus, la droite d_2 passe par le point $I_1(2 ; 3 ; 0)$ d'abscisse non nulle donc la droite d_2 n'est pas incluse dans le plan (O ; $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$). Vérifions si I_2 est un point de d_2.
Pour cela, on résout le système :
$\begin{cases} x_{I_2} = 2 - 2t \\ y_{I_2} = 3 - t \\ z_{I_2} = t \end{cases}$. Ce système équivaut à $\begin{cases} 0 = 2 - 2t \\ 2 = 3 - t \\ 1 = t \end{cases}$ c'est-à-dire à $\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$, ce qui convient.

I_2 est le point de d_2 ayant pour paramètre $t = 1$.

On en déduit que d_2 et (O ; $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) sont bien sécants en I_2.

3. La droite d_3 passe par le point $I_2(0 ; 2 ; 1)$ et elle a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}$ $(2 ; -1 ; 1)$.

Une représentation paramétrique de d_3 est donc $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - \ t \\ z = 1 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

(O ; $\vec{\imath}$, $\vec{k}$) est le plan constitué des points de l'espace d'ordonnée nulle.

Le point I_3 d'ordonnée 0 appartient à la droite d_3 donc on résout le système $\begin{cases} x_{I_3} = t \\ y_{I_3} = 2 - t \\ z_{I_3} = 1 + t \end{cases}$.

Ce système équivaut à $\begin{cases} x_{I_3} = 2t \\ 0 = 2 - t \\ z_{I_3} = 1 + t \end{cases}$ c'est-à-dire à $\begin{cases} x_{I_3} = 2 \times 2 \\ t = 2 \\ z_{I_3} = 1 + 2 \end{cases}$ donc à $\begin{cases} x_{I_3} = 4 \\ t = 2 \\ z_{I_3} = 3 \end{cases}$.

I_3 est le point de d_3 ayant pour paramètre $t = 2$.
Ses coordonnées sont $(4 ; 0 ; 3)$.

4. a. On a $\overrightarrow{v_1}$ (−2 ; −1 ; −1), $\overrightarrow{v_2}$ (−2 ; −1 ; 1), $\overrightarrow{v_3}$ (2 ; −1 ; 1).
Tout d'abord, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ ont leur première coordonnée opposées mais leur deuxième coordonnée sont égales donc $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ ne sont pas colinéaires.
On recherche s'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{v_3} = \alpha\,\overrightarrow{v_1} + \beta\,\overrightarrow{v_2}$.
Cela se traduit par le système :

$$\begin{cases} -2\alpha - 2\beta = 2 \\ -\alpha - \beta = -1. \\ -\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

On extrait les deux premières équations et on résout le système obtenu :

$\begin{cases} -2\alpha - 2\beta = 2 \\ -\alpha - \beta = -1 \end{cases}$. Ce système équivaut à $\begin{cases} -2\alpha - 2\beta = 2 \\ -2\alpha - 2\beta = -2 \end{cases}$.

Il n'est pas possible que –2 α – 2 β soit égal en même temps à 2 et à –2
donc ce système n'a pas de solution.
Ainsi $\overrightarrow{v_3}$ n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ donc ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires. On en déduit que les droites d_1, d_2 et d_3 ne sont pas coplanaires.

b. d_1 et d_2 sont sécantes en I_1 donc d_1 et d_2 sont coplanaires.
On nomme $\mathscr{P}$ le plan déterminé par d_1 et d_2.
De plus, d_2 et d_3 sont sécantes en I_2.
Puisque d_1, d_2 et d_3 ne sont pas coplanaires, la droite d_3 coupe le plan $\mathscr{P}$ en I_2.
Comme I_3 est un point de d_3 distinct de I_2, il n'appartient pas à ce plan.
Or I_3 est un point de d_4. Puisqu'il existe un point de d_4 n'appartenant pas au plan $\mathscr{P}$, cela signifie que les droites d_1, d_2 et d_4 ne sont pas coplanaires.