SUJET E

1. ABCDEFGH est un cube donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.
On en déduit que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.

2. a.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} && \text{Relation de Chasles.} \\ &= \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} && \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} \text{ car ABCD est un carré.} \\ &= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}. \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AL} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL} && \text{Relation de Chasles.} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CE} && \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ car ABCD est un carré.} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) \\ &= \frac{3}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}. \end{aligned}$$

3. On a $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ car ABFE est un carré. De manière analogue, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.
Ainsi $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\,\overrightarrow{AE}$, ce qui permet de constater que $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH} = 3\,\overrightarrow{AL}$.
On en déduit que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AH}$. Puisque $\overrightarrow{AL}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$, cela signifie que ces vecteurs sont coplanaires.

4. K est le milieu du segment [FH] donc $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FH} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AH}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$.
Dès lors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FK} && \text{Relation de Chasles.} \\ &= \overrightarrow{AF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 3\,\overrightarrow{AL}. && \text{Car } \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH} = 3\,\overrightarrow{AL}. \end{aligned}$$

Puisque $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AL}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont colinéaires et les points A, K et L sont alignés.