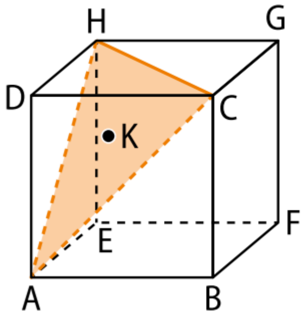
131 **1. a.** En appliquant la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Or ABCD est un carré donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont égaux. On en déduit l'égalité $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
De manière analogue, puisque AEHD est un carré, on a $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$.



b. D'après l'énoncé, $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{HK} = \vec{0}$.
En utilisant la relation de Chasles, cette égalité équivaut à :
$\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AK} = \vec{0}$ soit $3\,\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HA} = \vec{0}$.
On en déduit l'égalité $3\,\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}$.
Or, d'après la question précédent, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$.
Cela nous permet d'obtenir l'égalité :
$3\,\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$ soit $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$.

2. On va chercher à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DK}$ sont colinéaires.
Tout d'abord, on exprime le vecteur $\overrightarrow{DF}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} && \text{Relation de Chasles.} \\ &= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}. && \text{Puisque ABFE est un carré, on a } \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}. \end{aligned}$$

Puis on exprime le vecteur $\overrightarrow{DK}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DK} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AK} && \text{Relation de Chasles.} \\ &= -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} && \text{Car } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}. \\ &= -\frac{3}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}. \end{aligned}$$

On constate que $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$. Puisque les vecteurs $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires, les points D, F et K sont alignés.