138 **a. Cette réponse convient.**
En effet, $x_{\vec{t}} = 7 \times x_{\vec{u}}$ mais $z_{\vec{t}} \neq 7 \times z_{\vec{u}}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{t}$ ne sont pas colinéaires donc ils forment la base d'un plan.

b. Cette réponse convient.
En effet, on a $\vec{u}(1 ; -1 ; 3)$, $\vec{v}(2 ; 7 ; -5)$, $\vec{w}(1 ; 17 ; -17)$.
On recherche s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$.*
Cela se traduit par le système :
$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ -\alpha + 7\beta = 17 \\ 3\alpha - 5\beta = -17 \end{cases}.$$
On extrait les deux premières équations et on résout le système obtenu :
$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ -\alpha + 7\beta = 17 \end{cases}.$$
On remplace la deuxième équation par la somme des deux équations, le système équivaut à :
$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 9\,\beta = 18 \end{cases} \text{ soit à } \begin{cases} \alpha + 2 \times 2 = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}.$$
On obtient alors $\alpha = -3$ et $\beta = 2$.
Il faut à présent s'assurer si la troisième égalité est vérifiée par ces valeurs :
$3\,\alpha - 5\,\beta = 3 \times (-3) - 5 \times 2 = -19 \neq -17$ ce ne qui convient pas.
Ainsi $\vec{w}$ n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires : ils forment une base de l'espace.

c. Cette réponse convient.
D'après la recherche précédente, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace avec :
$\vec{u}(1 ; -1 ; 3)$, $\vec{v}(2 ; 7 ; -5)$, $\vec{w}(1 ; 17 ; -17)$.
On cherche trois réels *a*, *b* et *c* tels que $\vec{t} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w}$.
Puisque $\vec{t}$ a pour coordonnées (7 ; –7 ; 19), l'égalité $\vec{t} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w}$ est donc équivalente au système : $\begin{cases} a + 2b + c = 7 \\ -a + 7b + 17c = -7 \\ 3a - 5b - 17c = 19 \end{cases}.$
La première équation donne $a = 7 - 2\,b - c$. La deuxième équation donne $a = 7\,b + 17\,c + 7$.
Ainsi $7 - 2\,b - c = 7\,b + 17\,c + 7$ c'est-à-dire $9\,b = -18\,c$ soit $b = -2\,c$.
En remplaçant dans la première équation, on obtient :
$a = 7 - 2\,b - c$ Relation de Chasles.
$= 7 - 2\,(-2\,c) - c$
$= 7 + 3\,c$
En substituant *a* et *b* dans la dernière équation, cela donne :
$3\,(7 + 3\,c) - 5\,(-2\,c) - 17\,c = 19$ soit $21 + 9\,c + 10\,c - 17\,c = 19$
d'où $2\,c = -2$ qui équivaut à $c = -1$.
On en déduit les valeurs $c = -1$, $b = -2 \times (-1) = 2$ et $a = 7 + 3 \times (-1) = 4$.
En conclusion, les coordonnées du vecteur $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont (4 ; 2 ; –1).

d. Cette réponse convient.
D'après la recherche précédente on a $\vec{t} = 4\,\vec{u} + 2\,\vec{v} - \vec{w}$ donc $\vec{w} = 4\,\vec{u} + 2\,\vec{v} - \vec{t}$.
On en déduit que les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})$ sont (4 ; 2 ; –1).