Chapitre 2
Vecteurs, droites et plans de l'espace

Revoir des points essentiels

143 Les points I, J et K sont définis par les égalités $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BG}$.

Tout d'abord, on exprime le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{EG}$:

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EJ}$ Relation de Chasles

$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{3}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$

Puis on exprime le vecteur $\overrightarrow{IK}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{EG}$:

$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK}$ Relation de Chasles

$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{BG}$

$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{BE} + 2(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EG})$ Relation de Chasles

$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{6}{3}\overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{EG}$

$= \frac{4}{3}\overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{EG}$

On constate que $\overrightarrow{IK} = 4\,\overrightarrow{IJ}$.

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires, les points I, J et K sont alignés.

144 **a.** En utilisant la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

De manière analogue, on a $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

b. $3\overrightarrow{AP} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP})$ Relation de Chasles

$= 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BP}$

$= 3\overrightarrow{AB} + 3\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}\right)$ Car $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$

$= 3\overrightarrow{AB} + 3 \times \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} + 3 \times \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$

$= 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}$

$= 3\overrightarrow{AB} + 2(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + (-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$ Question **a.**

$= 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

De plus, ABCDEFGH est un cube donc $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\,\overrightarrow{AP}$.

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires, les points A, G et P sont alignés.

145 La droite (AB) passe par le point A(5 ; 0 ; –2) et elle a pour vecteur directeur : $\overrightarrow{AB}(-4\,;-5\,;1)$.

Une représentation paramétrique de (AB) est donc $\begin{cases} x = x_A + t\, x_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_A + t\, y_{\overrightarrow{AB}} \\ z = z_A + t\, z_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$,

soit $\begin{cases} x = 5 - 4\,t \\ y = \quad -5t \\ z = -2 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Le point C d'ordonnée 15 appartient à la droite (AB) donc on résout le système $\begin{cases} x_C = 5 - 4t \\ y_C = \quad -5t \\ z_C = -2 + t \end{cases}$.

Ce système équivaut à $\begin{cases} x_C = 5 - 4t \\ 15 = \quad -5t \\ z_C = -2 + t \end{cases}$ c'est-à-dire à $\begin{cases} x_C = 5 - 4 \times (-3) \\ t = \quad -3 \\ z_C = \quad -2 + (-3) \end{cases}$ donc à $\begin{cases} x_C = 17 \\ t = -3. \\ z_C = -5 \end{cases}$

C est le point de (AB) ayant pour paramètre $t = -3$.

Ses coordonnées sont (17 ; 15 ; –5).

146 La droite (AB) passe par le point A(7 ;–2 ; 4) et elle a pour vecteur directeur : $\overrightarrow{AB}(-8\,;4\,;-8)$.

Une représentation paramétrique de (AB) est donc $\begin{cases} x = x_A + t\, x_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_A + t\, y_{\overrightarrow{AB}} \\ z = z_A + t\, z_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$,

soit $\begin{cases} x = \quad 7 - 8\,t \\ y = -2 + 4\,t \\ z = \quad 4 - 8\,t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Le point C d'abscisse –5 appartient à la droite (AB) donc on résout le système $\begin{cases} x_C = \quad 7 - 8t \\ y_C = -2 + 4t \\ z_C = \quad -2 + t \end{cases}$.

Ce système équivaut à $\begin{cases} -5 = \quad 7 - 8t \\ y_C = -2 + 4t \\ z_C = \quad 4 - 8t \end{cases}$ c'est-à-dire à $\begin{cases} 8t = \quad 12 \\ y_C = -2 + 4t \\ z_C = \quad 4 - 8t \end{cases}$

soit à $\begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ y_C = -2 + 4 \times \frac{3}{2} \\ z_C = 4 - 8 \times \frac{3}{2} \end{cases}$ donc à $\begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ y_C = \quad 4 \\ z_C = -8 \end{cases}$.

C est le point de (AB) ayant pour paramètre $t = \frac{3}{2}$.

Ses coordonnées sont (–5 ; 4 ; –8).