Sujet A

1. a. On a $\overrightarrow{OA}(10\,;0\,;1)$ et $\overrightarrow{OB}(1\,;7\,;1)$.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 10\times 1 + 0\times 7 + 1\times 1 = 10 + 0 + 1 = 11.$

Comme le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ n'est pas nul, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas orthogonaux donc les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.

b. Comme $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos(\widehat{\mathrm{AOB}})$, on a $\cos\left(\widehat{\mathrm{AOB}}\right) = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}}$.

D'autre part : OA = $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{10^2+0^2+1^2} = \sqrt{101}$

et OB = $\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \sqrt{1^2+7^2+1^2} = \sqrt{51}$.

On en déduit que $\cos\left(\widehat{\mathrm{AOB}}\right) = \frac{11}{\sqrt{101}\times\sqrt{51}}$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient $\widehat{\mathrm{AOB}} \approx 81{,}2°$ arrondie au dixième.

2. $7x_O + 9y_O - 70z_O = 7\times 0 + 9\times 0 - 70\times 0 = 0$

donc O appartient au plan d'équation $7x + 9y - 70z = 0$.

$7x_A + 9y_A - 70z_A = 7\times 10 + 9\times 0 - 70\times 1 = 0$

donc A appartient au plan d'équation $7x + 9y - 70z = 0$.

$7x_B + 9y_B - 70z_B = 7\times 1 + 9\times 7 - 70\times 1 = 0$

donc B appartient au plan d'équation $7x + 9y - 70z = 0$.

On en déduit que le plan (OAB) est le plan d'équation $7x + 9y - 70z = 0$.

3. On a $\overrightarrow{CA}(10-0\,;0-0\,;1-5)$ soit $\overrightarrow{CA}(10\,;0\,;-4)$.

La droite (CA) est la droite passant par C(0 ; 0 ; 5) et de vecteur directeur $\overrightarrow{CA}$ donc la droite (CA) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 10t \\ y = 0 \\ z = 5-4t \end{cases} \quad \text{avec } t \text{ réel quelconque.}$$

4. Le point D a pour coordonnées $\left(\frac{x_O+x_C}{2}\,;\frac{y_O+y_C}{2}\,;\frac{z_O+z_C}{2}\right)$

soit $\left(\frac{0+0}{2}\,;\frac{0+0}{2}\,;\frac{0+5}{2}\right)$ donc $\left(0\,;0\,;\frac{5}{2}\right)$.

Comme $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (OAB) qui a pour équation $7x + 9y - 70z = 0$, le plan $\mathscr{P}$ a une équation de la forme : $7x + 9y - 70z + d = 0$.

D appartient à $\mathscr{P}$ donc $7x_D + 9y_D - 70z_D + d = 0$

soit $7\times 0 + 9\times 0 - 70\times\frac{5}{2} + d = 0$ et $-175 + d = 0$, ce qui donne $d = 175$.

Le plan $\mathscr{P}$ a donc pour équation $7x + 9y - 70z + 175 = 0$.

5. Soit M(x ; y ; z) un point de l'espace.

Le point M appartient à l'intersection de $\mathscr{P}$ et (CA) si et seulement si M appartient à $\mathscr{P}$ et M appartient à (CA), ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} 7x + 9y - 70z + 175 = 0 \\ x = 10t \\ y = 0 \\ z = 5-4t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

En substituant les expressions de x, y et z dans la première équation, on obtient :

$7\times 10t + 9\times 0 - 70\times(5-4t) + 175 = 0$

soit $70t - 350 + 280t + 175 = 0$

donc $350t - 175 = 0$ et $350t = 175$ puis $t = \frac{175}{350}$ donc $t = \frac{1}{2}$.
On en déduit : $x = 10 \times \frac{1}{2} = 5$; $y = 0$ et $z = 5 - 4 \times \frac{1}{2} = 5 - 2 = 3$.
Le point F intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (CA) a pour coordonnées (5 ; 0 ; 3).

6. On a $\overrightarrow{\mathrm{EF}}(5 - \frac{1}{2} ; 0 - \frac{7}{2} ; 3 - 3)$ soit $\overrightarrow{\mathrm{EF}}(\frac{9}{2} ; -\frac{7}{2} ; 0)$
et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(1 - 10 ; 7 - 0 ; 1 - 1)$ soit $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(-9 ; 7 ; 0)$.
On remarque que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -2\overrightarrow{\mathrm{EF}}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ sont colinéaires, ce qui prouve que les droites (AB) et (EF) sont parallèles.