Sujet E

1. a. Comme AEFB est un carré, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$.

Comme BCGF est un carré $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$.

On déduit des égalités précédentes que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$, donc $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$.

b. En utilisant les propriétés de bilinéarité du produit scalaire, on a :
$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}\right) \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}$.
ABCD est un carré donc ses diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires,
et on déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
AEFB est un carré donc (AE) est perpendiculaire à (AB).
ADHE est un carré donc (AE) est perpendiculaire à (AD).
La droite (AE) est orthogonale à (AB) et à (AD) qui sont deux droites sécantes du plan (ABD) donc (AE) est perpendiculaire au plan (ABD).
La droite (AE) est donc orthogonale à toutes les droites du plan (ABD) en particulier à la droite (BD).
On en déduit que $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
Finalement $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 + 0 = 0$.

c. Comme $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux.
Comme $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont orthogonaux.
Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan (BDE) donc $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE) ce qui prouve que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (BDE).

2. a. Dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$, B a pour coordonnées (1 ; 0 ; 0),
D a pour coordonnées (0 ; 1 ; 0) et E a pour coordonnées (0 ; 0 ;1).
$x_B + y_B + z_B - 1 = 1 + 0 + 0 - 1 = 0$
donc B appartient au plan d'équation $x + y + z - 1 = 0$.
$x_D + y_D + z_D - 1 = 0 + 1 + 0 - 1 = 0$
donc D appartient au plan d'équation $x + y + z - 1 = 0$.
$x_E + y_E + z_E - 1 = 0 + 0 + 1 - 1 = 0$
donc E appartient au plan d'équation $x + y + z - 1 = 0$.
On en déduit que le plan d'équation $x + y + z - 1 = 0$ est le plan (BDE).

b. Le point K est le point d'intersection du plan (BDE) avec sa perpendiculaire *d* passant par G c'est-à-dire (AG).
Comme $\overrightarrow{AG}(1\,;\,1\,;\,1)$ et A(0 ; 0 ; 0), une représentation paramétrique de (AG) est
$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
Comme K appartient à la fois à (AG) et à (BDE),
ses coordonnées (x ; y ; z) vérifient le système :
$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ avec t réel.
En substituant les expressions de x, y et z dans la première équation, on obtient :
$t + t + t - 1 = 0$ soit $3t - 1 = 0$ ce qui équivaut à $3t = 1$ donc à $t = \frac{1}{3}$.

On a alors : $x = \frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{3}$ et $z = \frac{1}{3}$.
Le point K a donc pour coordonnées $(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3})$.

c. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du triangle BDE et $\mathcal{V}$ le volume de la pyramide BDEG.
On a $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathrm{GK} \times \mathcal{A}$.
Or GK = $\sqrt{(x_K - x_G)^2 + (y_K - y_G)^2 + (z_k - z_G)^2}$
$= \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2}$
donc GK = $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$.
On a alors $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{4}{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}$.