Chapitre 3
Orthogonalité dans l'espace

Revoir des points essentiels

161 On a :

$\overrightarrow{AB}(2-1;3-1;4-1)$ soit $\overrightarrow{AB}(1;2;3)$ et $\overrightarrow{CD}(6-7;-7-(-6);5-4)$ soit $\overrightarrow{CD}(-1;-1;1)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=1\times(-1)+2\times(-1)+3\times1=-1-2+3=0$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux, donc les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

162 **1.** $\vec{u}.\vec{v}=2\times2+1\times1+5\times(-1)=4+1-5=0$.

Donc le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $\vec{v}$.

$\vec{u}\cdot\vec{w}=2\times3+1\times4+5\times(-2)=6+4-10=0$.

Donc le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $\vec{w}$.

2. D'après la question **1.**, le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan $\mathcal{P}$, de plus ce vecteur est non nul, donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. Comme $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite d, on déduit que d est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

163 On a :

$\overrightarrow{AB}(11-4;2-0;14-11)$ soit $\overrightarrow{AB}(7;2;3)$ et $\overrightarrow{AC}(2-4;1-0;15-11)$ soit $\overrightarrow{AC}(-2;1;4)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=7\times(-2)+2\times1+3\times4=-14+2+12=0$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en A.

164 **1.** Comme A est l'origine du repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, A a pour coordonnées (0 ; 0 ; 0).

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$ d'après la relation de Chasles.

Comme ABFE est un carré, on a $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AE}$.

On en déduit l'égalité $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AF}=1\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AD}+1\overrightarrow{AE}$.

Les coordonnées du point F dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ sont donc (1 ; 0 ; 1).

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ d'après la relation de Chasles.

Comme ABCD est un carré, on a $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

On en déduit l'égalité $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AC}=1\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AD}+0\overrightarrow{AE}$.

Les coordonnées du point C dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ sont donc (1 ; 1 ; 0).

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}$ d'après la relation de Chasles.

Comme ADHE est un carré, on a $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AE}$.

On en déduit l'égalité $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AH} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$.

Les coordonnées du point H dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ sont donc (0 ; 1 ; 1).

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}$ d'après la relation de Chasles.

Comme CDHG est un carré, on a $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$.

On a vu précédemment que $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ donc on a $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$.

Comme on a également $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, on déduit que :

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ soit $\overrightarrow{AG} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$.

Les coordonnées du point G dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ sont donc (1 ; 1 ; 1).

2. Comme $\overrightarrow{AG} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$, le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées (1 ; 1 ; 1).

On a :

$\overrightarrow{FC}(1-1; 1-0; 0-1)$ soit $\overrightarrow{FC}(0; 1; -1)$.

$\overrightarrow{FH}(0-1; 1-0; 1-1)$ soit $\overrightarrow{FH}(-1; 1; 0)$

$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{FC} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0 + 1 - 1 = 0$ donc $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{FC}$.

$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{FH} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times 0 = -1 + 1 + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{FH}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est donc un vecteur non nul, orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FH}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan (FCH).

On en déduit que $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (FCH) donc que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (FCH).

165 Comme $\vec{n}(1; -3; 5)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, ce plan a une équation de la forme $x - 3y + 5z + d = 0$.

A(7 ; 4 ; –2) appartient au plan $\mathcal{P}$ donc $x_A - 3y_A + 5z_A + d = 0$ soit $7 - 3\times4 + 5\times(-2) + d = 0$ puis $-15 + d = 0$ ce qui donne $d = 15$.

Le plan $\mathcal{P}$ a donc pour équation : $x - 3y + 5z + 15 = 0$.

166 Soit $\mathcal{P}$ le plan perpendiculaire à d et passant par A.

Comme la droite d est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d, le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Ce plan a donc une équation de la forme $2x + 5y + z + d = 0$.

A(1 ; –1 ; 3) appartient au plan $\mathcal{P}$ donc $2x_A + 5y_A + z_A + d = 0$

soit $2\times1 + 5\times(-1) + 3 + d = 0$ puis $d = 0$.

Le plan $\mathcal{P}$ a donc pour équation : $2x + 5y + z = 0$.

167 Comme $\vec{n}(6; -1; 1)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, ce plan a une équation de la forme $6x - y + z + d = 0$.

A(1 ; 0 ; 3) appartient au plan $\mathcal{P}$ donc $6x_A - y_A + z_A + d = 0$ soit $6 \times 1 - 0 + 3 + d = 0$ puis $9 + d = 0$ ce qui donne $d = -9$.

Le plan $\mathcal{P}$ a donc pour équation : $6x - y + z - 9 = 0$.

168 1. Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2} ; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$ soit $\left(\frac{8+2}{2} ; \frac{4+2}{2} ; \frac{11+3}{2}\right)$ donc (5 ; 3 ; 7).

2. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(2-8; 2-4; 3-11)$ soit $(-6; -2; -8)$.

3. Le plan médiateur $\mathcal{P}$ de [AB] est le plan passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

Comme $\overrightarrow{AB}(-6; -2; -8)$, le plan $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $-6x - 2y - 8z + d = 0$.
I(5 ; 3 ; 7) appartient au plan $\mathcal{P}$ donc $-6x_I - 2y_I - 8z_I + d = 0$ soit $-6\times5 - 2\times3 - 8\times7 + d = 0$ puis $-92 + d = 0$ ce qui donne $d = 92$.
Le plan $\mathcal{P}$ a donc pour équation : $-6x - 2y - 8z + 92 = 0$.
Une autre équation de $\mathcal{P}$ est $-3x - y - 4z + 46 = 0$ que l'on obtient en divisant par 2 tous les coefficients de l'équation précédente.