Sujet C

1. Faux.

Un contre-exemple : la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

En divisant par n les membres de la double inégalité précédente on obtient :

$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La suite (u_n) est donc convergente mais elle n'est ni croissante ni décroissante (Les termes de la suite sont alternativement négatifs et positifs).

Elle est majorée par 1 et minorée par – 1.

2. Faux.

Soit n un entier naturel :

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= ((n + 1)^2 - 42(n + 1) + 4) - (n^2 - 42n + 4) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 42n - 42 + 4 - n^2 + 42n - 4 \\ &= 2n - 41. \end{aligned}$$

On résout : $2n - 41 \geq 0$.

On obtient : $2n \geq 41$ donc $n \geq \frac{41}{2}$.

Or $\frac{41}{2} = 20{,}5$ donc $p_{n+1} - p_n \geq 0$ pour n supérieur ou égal à 21 et $p_{n+1}-p_n \leq 0$ pour n inférieur ou égal à 21.

Conclusion : la suite (p_n) est donc croissante à partir du rang $n = 21$ et décroissante avant ce rang. Elle n'est donc pas strictement décroissante.

3. Vrai.

La suite géométrique de raison 0,8 converge vers 0 (car $-1 < 0{,}8 < 1$) en décroissant donc il existe bien un entier n_0 tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, $0{,}8^n < 0{,}01$.

À l'aide de la boucle « **While** », on répète le calcul des termes de la suite jusqu'à en trouver un strictement inférieur à 0,01.

La condition d'entrée dans la boucle est donc bien $0{,}8^n \geq 0{,}01$ qui s'écrit « **0,8**n≥0,01** » en Python.

L'indice du premier terme qui est strictement inférieur à 0,01 sera bien contenu dans la variable n après l'exécution du programme.

4. Vrai.

Pour tout entier naturel n , on a : $n^2 \leq (n + 1)^2 w_n \leq n^2 + n$.

Pour tout entier naturel n, $(n + 1)^2 > 0$.

Donc $\frac{n^2}{(n+1)^2} \leq w_n \leq \frac{n^2+n}{(n+1)^2}$.

L'étude des limites des membres de gauche et de droite conduisent à des formes indéterminées du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Dans les deux cas on factorise le numérateur et le dénominateur par le terme prépondérant après développement, en l'occurrence par n^2.

Pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1$ et d'après la règle sur la limite d'un quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{(n+1)^2}\right) = 1$.

De même, pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{n^2+n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+n}{n^2+2n+1} = \frac{n^2\left(1+\frac{n}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ d'après la règle sur la limite d'un quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right) = 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+n}{(n+1)^2}\right) = 1$.

D'après le théorème des « gendarmes », $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$.

5. Faux.

On a $-1 \leq -\frac{1}{3} \leq 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} 1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 1$.

De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+n^2 = +\infty$.

D'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+n^2} = 0$.

Donc la suite (u_n) converge vers 0.