107 **a.** Pour tout entier naturel n, on a :

$-1 \leq \sin(n) \leq 1$ donc $n + 1 \geq n - \sin(n) \geq n - 1$.

L'inégalité $n + 1 \geq n - \sin(n)$ ne permet pas de déterminer la limite de la suite mais l'inégalité $n - \sin(n) \geq n - 1$ permet d'utiliser un théorème de comparaison. Or $\lim_{n\to+\infty} n - 1 = +\infty$, donc par comparaison $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. On a pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1 :

$-1 \leq \cos(n) \leq 1$ donc $n - 1 \leq n - \cos(n) \leq n + 1$.

On divise chaque membre par $n^2 - 1$ qui est strictement positif puisque $n > 1$, donc $\frac{n-1}{n^2-1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2-1}$.

En étudiant les limites quand n tend vers $+\infty$ des quantités dans les membres de gauche et de droite de la double inégalité précédente on obtient la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

On factorise respectivement le numérateur par n et le dénominateur par n^2 pour n entier naturel strictement supérieur à 1, car c'est respectivement le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur.

$$\frac{n-1}{n^2-1} = \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{n}}{n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}.$$

$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$.

De plus, $\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Donc, d'après la règle sur la limite d'un produit, $\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = +\infty$.

Donc, d'après la règle sur la limite d'un quotient, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\right) = 0$.

De même : $\frac{n+1}{n^2-1} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$

$$= \frac{1+\frac{1}{n}}{n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.

De plus, $\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Donc, d'après la règle sur la limite d'un produit, $\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = +\infty$.

Donc, d'après la règle sur la limite d'un quotient, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\right) = 0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n^2-1} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2-1} = 0$ et pour tout entier naturel n,

$\frac{n-1}{n^2-1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2-1}$.

Donc, d'après le théorème des « gendarmes », la suite (u_n) converge vers 0.

c. Pour tout entier naturel n, on a $-1 \leq \cos(n^2) \leq 1$,

donc $-\sqrt{n}-1 \leq -\sqrt{n}+\cos(n^2) \leq -\sqrt{n}+1$.
L'inégalité $-\sqrt{n}-1 \leq -\sqrt{n}+\cos(n^2)$ ne permet pas de déterminer la limite de la suite mais l'inégalité $-\sqrt{n}+\cos(n^2) \leq -\sqrt{n}+1$ permet d'utiliser un théorème de comparaison.
Or $\lim_{n\to+\infty}(-\sqrt{n}+1) = -\infty$, donc par comparaison $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.