109 **1.** Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on note $P(n)$: $u_n \geq 2^n$.

Initialisation : $u_1 = 0^2 + 1 = 1$; $u_2 = 1^2 + 1 = 2$; $u_3 = 2^2 + 1 = 5$; $u_4 = 5^2 + 1 = 26$ et $2^4 = 16$, donc $u_4 \geq 2^4$. Donc $P(4)$ est vraie.

Hérédité : on considère un entier naturel n supérieur ou égal à 4 tel que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $u_n \geq 2^n$.

On montre que $P(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} \geq 2^{n+1}$.

On a : $u_n \geq 2^n$.

Or pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, u_n et 2^n sont positifs.

Donc par croissance de la fonction carré sur $[0 ; +\infty[$, $u_n^2 \geq (2^n)^2$ puis $u_n^2 \geq 2^{2n}$ et donc $u_n^2 + 1 \geq 2^{2n} + 1$.

Comme $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ on a donc $u_{n+1} \geq 2^{2n} + 1$.

On cherche à démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4 :

$2^{2n} + 1 \geq 2^{n+1}$.

$$\begin{aligned}\text{Or } 2^{2n} + 1 - 2^{n+1} &= 2^{2n} - 2^{n+1} + 1\\ &= (2^n)^2 - 2 \times 2^n + 1\\ &= (2^n - 1)^2\end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} \geq 2^{2n} + 1$ et $2^{2n} + 1 \geq 2^{n+1}$. Donc $u_{n+1} \geq 2^{n+1}$.

$P(n + 1)$ est donc vraie.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 4 et est héréditaire.

Donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a $u_n \geq 2^n$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4.

2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on a $u_n \geq 2^n$. 2^n est de la forme q^n avec $q > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$.

Donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Donc la suite (u_n) ne converge pas. Elle diverge et sa limite est $+\infty$.