111 **1.** On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 4\times 21^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 12\times 7^n = +\infty$.

On a donc la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On doit donc transformer l'écriture de un. Pour tout entier naturel n :

$$\frac{4\times 21^n}{12\times 7^n} = \frac{4}{12}\times\frac{21^n}{7^n}$$
$$= \frac{4\times 1}{4\times 3}\times\left(\frac{21}{7}\right)^n$$
$$= \frac{1}{3}\times 3^n.$$

3^n est de la forme q^n avec $q > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. Et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Donc, d'après la règle sur la limite d'un produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

2. (u_n) est une suite géométrique. On a : $0 < \sqrt{3} - 1 < 2$ donc $0 < \frac{\sqrt{3}-1}{2} < 1$.

Comme, $-1 < \frac{\sqrt{3}-1}{2} < 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La suite (u_n) converge vers 0.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel *par* $u_n = 3^n$.

La suite (u_n) est géométrique.

D'après la formule de la somme des termes d'une suite géométrique :

$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{3^{n+1}-1}{2} = \frac{3}{2}3^n - \frac{1}{2}$.

3^n est de la forme q^n avec $q > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La suite$(u_n)$ diverge vers $+\infty$.

4. $15 > 1$ et $5 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 15^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$.

On est en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

On factorise par 15^n. On peut écrire pour tout entier naturel *n*,

$$u_n = 15^n\left[-3 + \frac{5^n}{15^n} - \frac{1}{15^n}\right]$$
$$= 15^n\left[-3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{15^n}\right].$$

Or $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = -3$. De plus, $15 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{15^n} = 0$.

Donc, d'après la règle sur la limite d'une somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{15^n}\right] = -3$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} 15^n = +\infty$, d'où, d'après la règle sur la limite d'un produit,

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

5. $3 > 1$ et $4 > 1$ d'une part et $2 > 1$ et $5 > 1$ d'autre part.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 4^n = +\infty$ d'une part, et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^n = +\infty$ d'autre part.

On est en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ » au numérateur et au dénominateur. On factorise au numérateur par 4^n et par 5^n au dénominateur.

On peut écrire pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{4^n\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right]}{5^n\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1\right]}.$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^n \times \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}$$

Or $-1 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right] = -1$.

De même, $-1 < \frac{2}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$.

On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1\right] = 1$.

D'après la règle sur la limite d'un quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}\right] = -1$.

De plus $-1 < \frac{4}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$, d'où, d'après la règle sur la limite d'un produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.