113 **1.** Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_n - (-5) &= 2n^2 + 4n - 3 + 5 \\ &= 2n^2 + 4n + 2 \\ &= 2(n^2 + 2n + 1) \\ &= 2(n+1)^2. \end{aligned}$$

Or pour tout entier naturel n : $2(n+1)^2 \geq 0$ donc $u_n - (-5) \geq 0$.

Donc pour tout entier naturel n : $u_n \geq -5$. La suite (u_n) est donc minorée par -5.

2. Pour tout entier naturel n, on note $P(n) : v_n \leq 8$.

Initialisation : $v_0 = 0$ et $0 \leq 8$ donc $v_0 \leq 8$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité : on considère un entier naturel n tel que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $v_n \leq 8$. On montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $v_{n+1} \leq 8$.

On a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq v_n \leq 8 \\ 0 &\leq v_n^2 \leq 64 \\ 0 &\leq \frac{1}{2}v_n^2 \leq 32 \\ 8 &\leq \frac{1}{2}v_n^2 + 8 \leq 40 \\ &\sqrt{\frac{1}{2}v_n^2 + 8} \leq \sqrt{40}. \end{aligned}$$

Or $\sqrt{40} \leq \sqrt{64}$ et $\sqrt{64} = 8$ donc $v_{n+1} \leq 8$.

$P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a $v_n \leq 8$ pour tout entier naturel n.