115 **1.** a_0 est égal au nombre d'abonnés en 2020 + 0, c'est-à-dire en 2020 donc $a_0 = 7\,000$.

Soit un entier naturel n. 80 % des abonnés de l'année 2020 + n dont le nombre est noté a_n se réabonnent. Il reste donc $0{,}8a_n$ abonnés de l'année précédente, auquel on ajoute 4 000 nouveaux abonnés.

On note a_{n+1} le nombre d'abonnés l'année suivante.

On obtient donc $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 4\,000$ pour tout entier naturel n.

2. Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$: $a_n \leq 20\,000$.

Initialisation : $a_0 = 7\,000$ et $7\,000 \leq 20\,000$ donc $a_0 \leq 20\,000$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité : on considère un entier naturel n tel que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $a_n \leq 20\,000$.

On montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $a_{n+1} \leq 20\,000$.

On a : $a_n \leq 20\,000$.

$0{,}8a_n \leq 0{,}8 \times 20\,000$

$0{,}8a_n + 4\,000 \leq 0{,}8 \times 20\,000 + 4000$.

Or, $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 4\,000$ et $0{,}8 \times 20\,000 + 4\,000 = 20\,000$.

Donc $a_{n+1} \leq 20\,000$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a $a_n \leq 20\,000$ pour tout entier naturel n.

3. Pour tout entier naturel n,

$a_{n+1} - a_n = 0{,}8a_n + 4\,000 - a_n$

$= -0{,}2a_n + 4\,000$.

Or pour tout entier naturel n, $a_n \leq 20\,000$.

Donc, $-0{,}2a_n \geq -0{,}2 \times 20\,000$

$-0{,}2a_n + 4\,000 \geq -0{,}2 \times 20\,000 + 4\,000$

Or $-0{,}2 \times 20\,000 + 4\,000 = 0$.

Donc $a_{n+1} - a_n \geq 0$. La suite (a_n) est croissante.

4. La suite est croissante et majorée donc elle converge d'après le théorème de convergence monotone.