Chapitre 4
Les suites

Revoir des points essentiels

116 **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-9n+5) = -\infty$.

D'après la règle sur la limite d'une somme on est en présence de la forme indéterminée « ∞-∞ ». On factorise par n^2 pour n entier naturel non nul car c'est le terme prépondérant :

$u_n = 3n^2 - 9n + 5 = n^2(3 - \frac{9n}{n^2} + \frac{5}{n^2})$. On a : $\frac{9n}{n^2} = \frac{9}{n}$.

D'où : $u_n = n^2(3 - \frac{9}{n} + \frac{5}{n^2})$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{9}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(3 - \frac{9}{n} + \frac{5}{n^2}) = 3$ d'après la règle sur la limite d'une somme et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

Donc d'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty}(-3n^3 - 5n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2n+1) = -\infty$.

On est en présence de la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise le numérateur par n^3 et le dénominateur par n pour n entier naturel non nul car ce sont les termes prépondérants au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{n^3\left(-3-\frac{5n}{n^3}\right)}{n\left(-2+\frac{1}{n}\right)} = n\frac{-3-\frac{5}{n^2}}{-2+\frac{1}{n}}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3 - \frac{5}{n^2}\right) = -3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-2 + \frac{1}{n}\right) = -2$,

donc d'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-3-\frac{5}{n^2}}{-2+\frac{1}{n}} = 3/2$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc d'après la règle sur la limite d'un produit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\frac{-3-\frac{5}{n^2}}{-2+\frac{1}{n}}\right) = +\infty$ et

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-3n^3-5n}{-2n+1}\right) = +\infty$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty}(4n-5) =$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2n^2 - 3n + 7) = -\infty$.

On est en présence de la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

On factorise le numérateur par n et le dénominateur par n^2 pour n entier naturel non nul car ce sont les termes prépondérants au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{n\left(4-\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(-2-\frac{3n}{n^2}+\frac{7}{n^2}\right)} = \frac{1}{n}\frac{4-\frac{5}{n}}{-2-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4 - \frac{5}{n}\right) = 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-2 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}\right) = -2$,

donc d'après la règle sur la limite d'un quotient :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4-\frac{5}{n}}{-2-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}}\right)=2.$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$ donc d'après la règle sur la limite d'un produit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4n-5}{-2n^2-3n+7}\right)=0.$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\sqrt{n}+3)=-\infty.$

D'après la règle sur la limite d'une somme, on est en présence de la forme indéterminée « ∞-∞ ». On factorise par n pour n entier naturel non nul car c'est le terme prépondérant :

$u_n = n\left(1-\frac{\sqrt{n}}{n}+\frac{3}{n}\right).$

On a : $\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}$. D'où : $u_n = n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{3}{n}\right).$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{3}{n}\right)=1$ d'après la règle sur la limite d'une somme.

Donc d'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty.$

117 **a.** e^n est de la forme q^n avec $q > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-5e^n)=-\infty.$

Comme $-1 < 0{,}01 < 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}01^n=0.$

D'après la règle sur la limite d'une somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} -5e^n+0{,}01^n-5=-\infty.$

b. $4 > 1$ d'une part et $3>1$ et $5>1$ d'autre part.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n=+\infty$ d'une part et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n=+\infty$ d'autre part. On est en présence de la forme indéterminée « $\infty-\infty$ » au dénominateur.

On factorise au numérateur par 4^n et par 5^n au dénominateur.

On peut écrire pour tout entier naturel n,

$$u_n=\frac{4^n\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n-1\right]}{5^n\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\right]}.$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)^n\times\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n-1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}$$

Or $-1<\frac{1}{4}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0.$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n-1\right]=-1.$

De même, $-1<\frac{3}{5}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0.$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\right]=1.$

Donc d'après la règle sur la limite d'un quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n-1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}\right]=-1$

De plus $-1<\frac{4}{5}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$, d'où, d'après la règle sur la limite d'un produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0.$

c. $7 > 1$ et $21 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 7^n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 21^n=+\infty.$

On est en présence de la forme indéterminée « $\infty-\infty$ ».

On factorise par 21^n. On peut écrire pour tout entier naturel n,

$u_n = 21^n\left[\frac{7^n}{21^n} - 1\right]$

$= 21^n\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right]$

Or $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right] = -1$.

De plus, $21^n > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 21^n = +\infty$ d'où, d'après la règle sur la limite d'un produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

d. 3^n est de la forme q^n avec $q>1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$.

Comme $-1<-0,5<1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(-0,5)^n = 0$.

D'après la règle sur la limite d'une somme: $\lim\limits_{n\to+\infty}(3^n + (-0,5)^n + 4) = +\infty$.

118 Pour tout entier naturel n,

$v_n - 7 = -2n^2 + 14n - 17 - 7$

$= -2n^2 + 14n - 24$

$= -2(n^2 - 7n + 12)$

On factorise le trinôme : $n^2 - 7n - 12$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12$

$\Delta = 49 - 48$

$\Delta = 1$

$\Delta = 1^2$.

Il admet donc deux racines :

$x = \dfrac{-(-7)+1}{2}$ et $x' = \dfrac{-(-7)-1}{2}$

$x = \dfrac{8}{2}$ et $x' = \dfrac{6}{2}$

$x = 4$ et $x' = 3$.

Donc pour tout entier naturel n, $v_n - 7 = -2(n-3)(n-4)$.

En étudiant le signe on obtient pour tout entier naturel n, $n^2 - 7n + 12 \geq 0$ car le trinôme est négatif entre 3 et 4 et positif sinon.

Donc pour tout entier naturel n, $v_n \leq 7$.

119 Pour tout entier naturel n. $P(n)$: « $u_n \leq 3$».

Initialisation : $u_0 = 3$ et $3 \leq 3$ donc $u_0 \leq 3$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité : on considère un entier naturel n tel que $P(n)$ est vraie,

c'est-à-dire tel que $u_n \leq 3$. On montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} \leq 3$.

On a :

$u_n \leq 3$.

$2u_n \leq 2 \times 3$

$2u_n - 5 \leq 2 \times 3 - 5$.
Or : $u_{n+1} = 2u_n - 5$ et $2 \times 3 - 5 = 1$. Or $1 \leq 3$.
Donc $u_{n+1} \leq 3$.
Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel *n, P(n)* est vraie, c'est-à-dire que l'on a $u_n \leq 3$ pour tout entier naturel *n*.