Sujet A f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 - 6x^2 + 7x$.

1. • Calcul de la limite en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}x^4\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 6x^2 + 7x) = -\infty$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (-6x^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (7x) = -\infty$.

On est en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

On factorise $f(x)$ par x^4.

Pour tout réel x non nul : $f(x) = x^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right) = \frac{1}{2}$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{6}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{7}{x^3} = 0$.

donc par règle pour le produit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

• Calcul de la limite en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}x^4 + x^3 + 7x\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (-6x^2) = -\infty$.

On est aussi en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right) = \frac{1}{2}$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{7}{x^3} = 0$.

donc par règle pour le produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Pour tout réel x, $f'(x) = \frac{1}{2} \times 4x^3 + 3x^2 - 6 \times 2x + 7$

donc $f'(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$.

Et $f''(x) = 2 \times 3x^2 + 3 \times 2x - 12$ donc $f''(x) = 6x^2 + 6x - 12$.

3. • On vérifie les variations de f'.

Pour tout réel x, $f''(x) = 6(x^2 + x - 2)$.

Comme $6 > 0$, $f''(x)$ a le même signe que $x^2 + x - 2$.

On calcule les racines du polynôme du second degré $x^2 + x - 2$.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$

$\Delta > 0$, donc $x^2 + x - 2$ a deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$.

Comme le coefficient de x^2 est positif, $x^2 + x - 2$ est positif sur $]-\infty\,;-2]$ et sur $[1\,;+\infty[$; et négatif sur $[-2\,;1]$.

Donc f' est croissante sur $]-\infty\,;-2]$ et sur $[1\,;+\infty[$, et décroissante sur $[-2\,;1]$.

• On vérifie les limites de f'.

Pour tout réel x non nul, $f'(x) = x^3\left(2 + \frac{3}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right) = 2$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{12}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{7}{x^3} = 0$

donc par règle pour le produit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$.

De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right) = 2$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{12}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{7}{x^3} = 0$

donc par règle pour le produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.

• On vérifie les images de $-\frac{7}{2}$ et 1 par f'.

$f'\left(-\frac{7}{2}\right) = 2\left(-\frac{7}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 12\left(-\frac{7}{2}\right) + 7 = 0$

et $f'(1) = 2 + 3 - 12 + 7 = 0$.

4. a. D'après le tableau de variation,

$f'(x)$ s'annule en $-\frac{7}{2}$ et en 1.

$f'(x) \leq 0$ sur $\left]-\infty\,;-\frac{7}{2}\right]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $\left[-\frac{7}{2}\,;+\infty\right[$.

b.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-\frac{7}{2}\right)$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

avec $f\left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{2\,107}{32}$.