162 **1. a.** $\lim\limits_{x \to -1} 2 = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (x+1) = 0^+$ donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{2}{x+1} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -1} e^{0,5x} = e^{-0,5}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \left(-\frac{2}{x+1}\right) = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$.

On en déduit que la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} (0,5x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{0,5x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2 = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x+1} = 0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a. Pour tout réel x de $]-1\,;+\infty[$,

$f(x) = e^{u(x)} - 2 \times \frac{1}{v(x)}$ avec $u(x) = 0,5x$ et $u'(x) = 0,5$

$v(x) = x + 1$ et $v'(x) = 1$

Donc $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} - 2 \times \frac{-v'(x)}{(v(x))^2} = 0,5e^{0,5x} + \frac{2}{(x+1)^2}$.

b. Pour tout réel x de $]-1\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $]-1\,;+\infty[$.

3. Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est :

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

Or $f(0) = -1$ et $f'(0) = 2,5$.

Une équation de T est : $y = 2,5x - 1$.