Sujet C

1. Sur $[1\ ;+\infty[$, soit f définie par $f(x) = -2x^3 + x^2 - x + 1$ puis $f'(x) = -6x^2 + 2x - 1$.
$f'(x)$ est un polynôme du second degré dont le discriminant Δ vaut -20. Donc $\Delta < 0$.
$f'(x)$ est du signe du coefficient de x^2 sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[1\ ;+\infty[$;
Ainsi, pour tout réel x de $[1\ ;+\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante or $f(1) = -2\times 1^3 + 1^2 - 1 + 1 = -1$ donc pour tout réel x de $[1\ ;+\infty[$, $f(x) < 0$
d'où la bonne réponse est la réponse **c**.

2. Sur $[-1\ ;+\infty[$, soit f définie par $f(x) = x^4 + x^2$.
D'après l'énoncé, on sait que l'équation $f(x) = 6$ possède une unique solution α dans $[-1\ ;+\infty[$.
Étudions les différentes propositions.

a. $f(5{,}8) \approx 1165$: $f(5{,}8) > 6$ et $f(5{,}9) \approx 1246$: $f(5{,}9) > 6$, ce n'est donc pas la bonne réponse.

b. $f(1{,}4) \approx 5{,}8$: $f(1{,}4) < 6$ et $f(1{,}5) \approx 7{,}3$: $f(1{,}5) > 6$, c'est une bonne réponse.

c. $-1{,}9$ et $-1{,}5$ ne sont pas dans $[-1\ ;+\infty[$, ce n'est donc pas la bonne réponse.

d. $0{,}9$ n'est pas dans $[-1\ ;+\infty[$, ce n'est donc pas la bonne réponse.

D'où la seule bonne réponse est la réponse **b**.

3. Résoudre l'équation $-x^3 + 3x = k$ équivaut à résoudre l'équation $-x^3 + 3x - k = 0$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x - k$.
Pour tout réel x : $f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1) = -3(x-1)(x+1)$.
$f'(x)$ est un polynôme du second degré, du signe du coefficient de x^2 (c'est-à-dire négatif), à l'extérieur des racines.
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x - k) = -\infty$.
On a une forme indéterminée.
Mettons x en facteur dans l'écriture de $f(x)$: $f(x) = x\left(-x^2 + 3 - \dfrac{k}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ puis $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3 - \dfrac{k}{x}\right) = 3$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{k}{x} = 0$
d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^2 + 3 - \dfrac{k}{x}\right) = -\infty$ et ainsi, par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(-x^2 + 3 - \dfrac{k}{x}\right) = +\infty$.

De même pour la limite en $+\infty$:
$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - \dfrac{k}{x}\right) = 3$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{k}{x} = 0$
d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^2 + 3 - \dfrac{k}{x}\right) = -\infty$ et ainsi, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(-x^2 + 3 - \dfrac{k}{x}\right) = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
Enfin : $f(-1) = -2 - k$ et $f(1) = 2 - k$.

a. Si $k = 2$, alors $f(-1) = -4$ et $f(1) = 0$.
On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$, (f est strictement décroissante, continue et $0 \in\,]-\infty\,;-4]$), cela montre que f s'annule en valeur α de $]-\infty\,;-1]$, et à l'aide de la calculatrice, on trouve que $\alpha = -2$.

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	0	↘	-4	↗	0	↘	$-\infty$

À l'aide du tableau de variations, on peut donc affirmer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution dans l'intervalle $]-\infty\,;-1[$ et une solution en $x = 1$.

L'équation $f(x) = 0$ a donc deux solutions dans $\mathbb{R}$. Ce n'est pas la bonne réponse.

b. si $k = 3$, alors $f(-1) = -2 - 3 = -5$ et $f(1) = -1$.

x	$-\infty$		α		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	0	↘	-5	↗	-1	↘	$-\infty$

C'est une bonne réponse car f s'annule une seule fois.

c. si $k = -5$ alors $f(-1) = -2 + 5 = 3$ et $f(1) = 2 - (-5) = 7$.

x	$-\infty$		-1		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0		$-$		
f	$+\infty$	↘	3	↗	7	↘	0	↘	$-\infty$

C'est une bonne réponse car f s'annule une seule fois.

d. si $k = 1$, alors $f(-1) = -2 - 1 = -3$ et $f(1) = 2 - 1 = 1$.

x	$-\infty$		α		-1		β		1		γ		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			0		$+$		0		$-$		
f	$+\infty$	↘	0	↘	-3	↗	0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$

Ce n'est pas la bonne réponse car f s'annule trois fois.

D'où les bonnes réponses sont les réponses **b** et **c**.