107 **1.** Pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x^2 - 4$ puis $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 2x$ et $f''(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2$.
Quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ puis $\mathrm{e}^{-x} + 2 > 0$ donc f'' est toujours strictement positive donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. L'équation recherchée est $y = -x - 3$ car une équation de la tangente en 0 est donnée par $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ or $f(0) = -3$ et $f'(0) = -1$ d'où $y = -x - 3$.

3. f est convexe donc sa courbe est située au-dessus de toutes ses tangentes donc en particulier au-dessus de celle en 0, d'où pour tout réel x : $f(x) \geq -x - 3$.