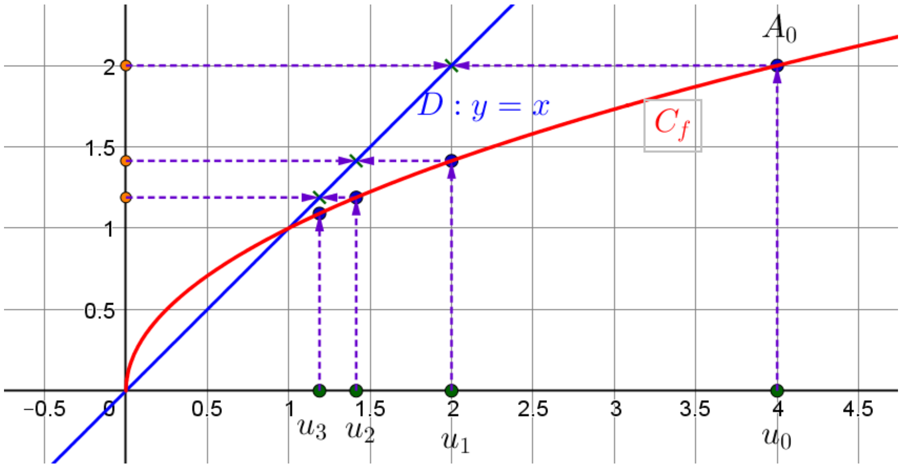
97 **1.**



2. On conjecture que la suite (u_n) décroît et que la suite (u_n) converge vers 1.

3. f croît sur $[0 ; +\infty[$ puisque la fonction racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

4. Pour tout naturel n, soit la propriété $P(n)$: « $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ ».
$u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{4} = 2$: $P(0)$ est vraie car $1 \leq u_1 \leq u_0$.
Soit n un naturel fixé tel que $P(n)$ est vraie, prouvons que $P(n + 1)$ est vraie.
Par hypothèse : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$; comme f est croissante sur $[1 ; +\infty[$,
on a : $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ c'est-à-dire $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$; ainsi $P(n + 1)$ est vraie.
D'après le principe de récurrence $P(n)$ est vraie donc (u_n) est décroissante, minorée par 1.

5. (u_n) est décroissante minorée donc (u_n) converge vers un réel L.

6. f est continue sur $[0 ; +\infty[$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$
donc L vérifie $L = f(L)$.
Sur $[0 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = x$ équivaut à $\sqrt{x} = x$ ce qui équivaut à $x = x^2$ (car comparer deux réels positifs équivaut à comparer leur carré respectif), ce qui équivaut à
$x^2 - x = 0$ ce qui donne $x(x - 1) = 0$, ce qui donne finalement $x = 0$ ou $x = 1$.
Comme (u_n) est minorée par 1, on en déduit que $L = 1$.