Chapitre 6
Continuité et convexité

Revoir des points essentiels

108 **1.** Pour tout réel x : $g(x) = x^5 + 4x + 2$ puis $g'(x) = 5x^4 + 4$.
$g'(x) > 0$ pour tout réel x ; g croît strictement sur $[-1; 0]$.
g est continue sur $[-1; 0]$.
$g(-1) = -3$ et $g(0) = 2$ donc 0 est compris entre $g(-1)$ et $g(0)$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
2. À l'aide de la calculatrice, on trouve $g(-0{,}50) \approx -0{,}03$: $g(-0{,}50) < 0$ et $g(-0{,}49) \approx 0{,}01$: $g(-0{,}49) > 0$ d'où $-0{,}50 \leq \alpha \leq -0{,}49$.

109 **1.** Pour tout réel x : $f(x) = e^{-x} - x + 8$ puis $f'(x) = -e^{-x} - 1$.
Pour tout réel x : $e^{-x} > 0$ puis $-e^{-x} < 0$ et $-e^{-x} - 1 < 0$ donc $f'(x) < 0$; f décroît strictement sur $\mathbb{R}$, et donc sur $[0 ; 3]$. De plus f est continue sur $[0 ; 3]$.
$f(0) = 9$; $f(3) \approx 5{,}05$: 6 est compris entre $f(0)$ et $f(3)$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 6$ possède une seule solution α.
2. À l'aide de la calculatrice, on trouve $f(2{,}12) \approx 6{,}13$: $f(2{,}12) > 6$ et $f(2{,}13) \approx 5{,}99$: $f(2{,}13) < 6$ d'où $2{,}12 \leq \alpha \leq 2{,}13$ donc une valeur approchée de α à 0,01 près est par exemple 2,12.

110 Pour tout réel x : $f(x) = 12x^3 - 12x^2 + 9$ puis $f'(x) = 36x^2 - 24x$ puis $f''(x) = 72x - 24$.
$72x - 24 \geq 0$ équivaut à $72x \geq 24$ ce qui équivaut à $x \geq \frac{24}{72}$ c'est-à-dire $x \geq \frac{1}{3}$.

Sur $]-\infty ; \frac{1}{3}]$, $f''(x) \leq 0$ donc f est concave puis sur $[\frac{1}{3}, +\infty[$, $f''(x) \geq 0$ donc f est convexe.

Le point d'abscisse $x = \frac{1}{3}$ est le seul point d'inflexion.

111 Pour tout réel x : $f(x) = (1 - x)\, e^{3x}$.
$f = uv$ avec pour tout réel x :
$u(x) = 1 - x$
$u'(x) = -1$
$v(x) = e^{3x}$
$v'(x) = 3e^{3x}$.
$f' = u'v + uv'$ donc pour tout réel x :

$f'(x) = -1e^{3x} + (1-x)3e^{3x} = e^{3x}(-1 + 3(1-x)) = e^{3x}(-1 + 3 - 3x)$ soit $f'(x) = e^{3x}(2 - 3x)$.

$f' = uv$ avec pour tout réel x :

$u(x) = 2 - 3x$

$u'(x) = -3$

$v(x) = e^{3x}$

$v'(x) = 3e^{3x}$.

$f'' = u'v + uv'$ donc pour tout réel x :

$f''(x) = -3e^{3x} + (2-3x)3e^{3x} = 3e^{3x}(-1 + 2 - 3x) = 3e^{3x}(1 - 3x)$.

Pour tout réel x : $3e^{3x} > 0$ donc le signe de $f''(x)$ est celui de $1 - 3x$.

$1 - 3x \geq 0$ équivaut à $1 \geq 3x$ équivaut à $\frac{1}{3} \geq x$.

Sur $]-\infty ; \frac{1}{3}]$, $f''(x) \geq 0$ donc f est convexe sur $]-\infty ; \frac{1}{3}]$.

Sur $[\frac{1}{3}, +\infty[$, $f''(x) \leq 0$ donc f est concave $[\frac{1}{3}, +\infty[$.

Le point d'abscisse $x = \frac{1}{3}$ est le seul point d'inflexion car f'' s'annule et change de signe en $\frac{1}{3}$.