SUJET A

1. ln $(x + 1)$ existe si, et seulement si, $x + 1 > 0$ ce qui équivaut à $x > -1$.

Pour x de $]-1\,;+\infty[$, ln (5) + ln $(x+1) = 1$ équivaut à ln $(5\times(x+1))$ = ln (e)

donc à $5x + 5 = \mathrm{e}$ ou encore à $x = \frac{\mathrm{e}-5}{5} = \frac{\mathrm{e}}{5} - 1 = \frac{1}{5}\mathrm{e} - 1$.

Comme le réel $\frac{1}{5}\mathrm{e} - 1$ appartient à $]-1\,;+\infty[$, l'équation ln (5) + ln $(x+1) = 1$ a pour solution $\frac{1}{5}\mathrm{e} - 1$.

Seule la réponse **c.** est une **bonne réponse**.

2. $f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} - 1 = \frac{2}{x} - 1$. Ainsi $f'(2) = \frac{2}{2} - 1 = 0$.

Seule la réponse **b.** est une **bonne réponse**.

3. $2^n > 175$ équivaut à $\ln(2^n) \geq \ln(175)$ soit à $n \ln(2) \geq \ln(175)$

ou encore à $n \geq \frac{\ln(175)}{\ln(2)}$.

On obtient $n \geq 7{,}45$ environ.

Le plus petit entier naturel n solution de l'inéquation $2^n > 175$ est $n = 8$.

Seule la réponse **c.** est une **bonne réponse**.

4. g est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = (x + 1)$ et $v(x) = \ln(x)$.

Les fonctions u et v sont dérivables et pour tout réel x de $]0; +\infty[$,

$u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

Ainsi, la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$g'(x) = 1 \times \ln(x) + (x+1) \times \frac{1}{x}$ soit $g'(x) = \ln(x) + 1 + \frac{1}{x}$.

Seule la réponse **d.** est une **bonne réponse**.

5. • Calcul de f'' la dérivée de f'

f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = 1 - \ln(x)$.

Les fonctions u et v sont dérivables et pour tout réel x de $]0\,; 3]$,

$u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\frac{1}{x}$.

Ainsi, la fonction f est dérivable sur $]0\,; 3]$ et

$f'(x) = 2x \times (1 - \ln(x)) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x}\right)$ soit $f'(x) = 2x - 2x\ln(x) - x$,

c'est-à-dire $f'(x) = x - 2x\ln(x)$.

• Signe de $f'(x)$

On a $f'(x) = x(1 - 2\ln(x))$.
Sur [1 ; 3], $x > 0$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 2\ln(x)$.

$1 - 2\ln(x) \geq 0$ équivaut à $2\ln(x) \leq 1$ soit à $\ln(x) \leq \frac{1}{2}$, donc à $x \leq e^{\frac{1}{2}}$.

On en déduit aussi que, sur $[1 ; e^{\frac{1}{2}}]$, f' est positive donc que f est croissante et que sur $[e^{\frac{1}{2}} ; 3]$, f' est négative donc que f est décroissante.

Comme $e^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}65$, les réponses **b.** et **d.** sont des **réponses fausses**.

• Calcul de f'' la dérivée de f'

L'expression $2x\ln(x)$ de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = \ln(x)$.
Les fonctions u et v sont dérivables et pour tout réel x de]0 ; 3],
$u'(x) = 2$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

Ainsi, l'expression $2x\ln(x)$ est dérivable sur]0 ; 3] et sa dérivée est :
$2 \times \ln(x) + 2x \times \frac{1}{x}$ soit $2\ln(x) + 2$.

On en déduit que $f''(x) = 1 - (2\ln(x) + 2)$ soit $f''(x) = -2\ln(x) - 1$.
Sur [1 ; 3], $\ln(x) > 0$, donc $-2\ln(x) - 1 < 0$ soit $f''(x) < 0$.
On en déduit que f est concave sur [1 ; 3].

La réponse **a.** est une **réponse fausse**.

On en déduit aussi que, sur [1 ; 3], f' est décroissante.

Seule la réponse **c.** est **une bonne réponse**.

6. $f(e) = e^2(1 - \ln(e)) = 0$.

On a vu dans la question précédente que $f'(x) = x - 2x\ln(x)$,
ainsi $f'(e) = e - 2^e \times \ln(e) = -e$.

Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse e est :
$y = -e(x - e) + 0$, soit $y = -ex + e^2$.

Seule la réponse **c.** est une bonne réponse.

7. On a vu dans la question **5.** que $f''(x) = -2\ln(x) - 1$.

$-2\ln(x) - 1 \geq 0$ équivaut à $-2\ln(x) \geq 1$ soit à $\ln(x) \leq -\frac{1}{2}$ donc à $x \leq e^{-\frac{1}{2}}$.

De même $-2\ln(x) - 1 \leq 0$ équivaut à $x \geq e^{-\frac{1}{2}}$.

$\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse $e^{-\frac{1}{2}}$. Or $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Seule la réponse **d.** est une bonne réponse.