159 **1.** • $\lim\limits_{x \to 0} 4x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

• $g(x) = 4x - x \ln x = x(4 - \ln(x))$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} (4 - \ln x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(4 - \ln x) = -\infty$.

• La courbe ne possède pas d'asymptotes.

2. L'expression $x \ln(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$.

Les fonctions u et v sont dérivables et pour tout réel x de $]0; +\infty[$,

$u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

Ainsi, la dérivée de l'expression $x \ln(x)$ est $1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

Alors, $g'(x) = 4 - (\ln(x) + 1) = 3 - \ln(x)$.

Pour x de $]0 ; +\infty[$, on a $g'(x) \geq 0$ équivaut à $\ln(x) \leq 3$ donc à $x \leq e^3$.
Ainsi, g est croissante sur $]0 ; e^3]$ et décroissante sur $[e^3 ; +\infty[$.

3. $g(x) = 0$ équivaut à $x(4 - \ln(x)) = 0$ c'est-à-dire à $x = 0$ ou $\ln(x) = 4$
donc à $x = 0$ ou $x = e^4$. Comme le réel 0 n'appartient pas à $]0 ; +\infty[$, l'équation
$g(x) = 0$ a pour solution : $x = e^4$.

On obtient le tableau de variations :

Valeurs de x	0	e^3	e^4	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$		$-$	
Variations de g	0 ↗	e^3	↘ 0 ↘	$-\infty$

$g(e^3) = 4e^3 - e^3 \times \ln(e^3) = 4e^3 - 3e^3 = e^3$.
On en déduit que $g(x) \geq 0$ sur $]0 ; e^3]$ ainsi que sur $[e^3 ; e^4]$ et que $g(x) \leq 0$ sur
$[e^4 ; +\infty[$. Ainsi, g est positive sur $]0 ; e^4]$ et négative sur $[e^4 ; +\infty[$.

4. Sur l'intervalle $]0 ; e^3]$, g est continue et strictement croissante, $10 \in]0 ; e^3[$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,
l'équation $g(x) = 10$ admet une unique solution.

Sur l'intervalle $[e^3 ; +\infty[$, g est continue et strictement décroissante, $10 \in]-\infty ; e^3[$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 10$ admet une unique solution.

L'équation $g(x) = 10$ admet donc deux solutions dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

Si on note α et β les deux racines, à l'aide de la calculatrice on obtient :

$g(3{,}72) \approx 9{,}993 < 10$ et $g(3{,}73) \approx 10{,}010 > 10$; ainsi $3{,}72 < \alpha < 3{,}73$

$g(43{,}35) \approx 10{,}001 > 10$ et $g(43{,}36) \approx 9{,}993 < 10$; ainsi $43{,}35 < \beta < 43{,}36$.