160 **1.** $f(1) = -1$ car le point de coordonnées $(1\ ;\ -1)$ est un point de la courbe.

$f'(1) = -2$, c'est la pente de la tangente T.

2. a. $f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} + a \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x} - \frac{a}{x^2}$.

b. Comme $f'(1) = -2$, on a : $\frac{2}{1} - \frac{a}{1^2} = -2$, donc $2 - a = -2$, soit $a = 4$.

Comme $f(1) = -1$, on a : $2\ \ln(1) + \frac{a}{1} + b = -1$, donc $0 + a + b = -1$,

ou encore $4 + b = -1$, soit $b = -5$.

3. • $f(x) = 2\ \ln(x) + \frac{4}{x} - 5 = \frac{1}{x}(2x\ \ln(x) + 4 - 5x)$.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x\ \ln\ x) = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (2x\ \ln(x) + 4 - 5x) = 4$.

De plus $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$. Ainsi, par produit, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

• La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale la courbe représentative de f.

• On a $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{4}{x} - 5\right) = -5$,

donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4. $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} = \frac{2x-4}{x^2}$.

Comme x^2 est toujours positif, le signe de f' est celui de $2x - 4$.

On en déduit que $f'(x) \leq 0$ si $x \leq 2$ et $f'(x) \geq 0$ si $x \geq 2$.

Ainsi, f est décroissante sur $]0\ ;\ 2]$ et croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.

5. On a $f(2) = 2\ \ln(2) + \frac{4}{2} - 5 = 2\ln(2) - 3 \approx -1{,}6$.

Sur l'intervalle $]0\ ;\ 2[$, f est continue et strictement décroissante,

$0 \in]2\ln(2) - 3\ ;\ +\infty[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

Sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$, f est continue et strictement croissante,

$0 \in\ ]2\ln(2) - 3\ ;\ +\infty[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution.

L'équation $f(x) = 10$ admet donc deux solutions dans l'intervalle $]0; +\infty[$.