Sujet B

1. Vrai.

Pour tout réel x, $f(-x) = \sqrt{2}\,(-x) + 2\sin(-x)$
$= -\sqrt{2}x - 2\sin(x)$
$= -(\sqrt{2}x - 2\sin(x)$
$= -f(x)$.

Donc f est impaire.

2. Faux.

Pour tout réel x, $f(x + 2\pi) = \sqrt{2}\,(x + 2\pi) + 2\sin(x + 2\pi)$
$= \sqrt{2}(x) + 2\sqrt{2}\pi + 2\sin(x)$
$= \sqrt{2}(x) + 2\sin(x) + 2\sqrt{2}\pi$
$= f(x) + 2\sqrt{2}\pi$.

$f(x + 2\pi) \neq f(x)$, donc f n'est pas périodique de période 2π.

3. Vrai.

$f'(x) = \sqrt{2} + 2\cos(x)$.
$f''(x) = -2\sin(x)$.
Or, si $-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq 0$ alors $\sin(x) \leq 0$ et si $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ alors $\sin(x) \geq 0$.
Donc si $-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq 0$ alors $f''(x) \geq 0$ et si $0 \leq (x) \leq \frac{3\pi}{4}$ alors $f''(x) \leq 0$.
Donc f' est décroissante sur $[0\,;\frac{3\pi}{4}]$ et f' est croissante sur $[-\frac{3\pi}{4}\,; 0]$.
Donc f' admet en 0 un minimum qui vaut $f'(0) = \sqrt{2} + 2 \times \cos 0 = \sqrt{2} + 2$.
Donc, pour tout réel x de $[-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}]$, $f'(x) \geq 0$.
Donc f est croissante sur $[-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}]$.

4. Faux.

$f''(x) = -2\sin(x)$.
Si $\pi \leq x \leq 2\,\pi$, alors $\sin(x) \leq 0$.
Donc $f''(x) \geq 0$.
Donc f est convexe sur $[\pi\,; 2\pi]$.

5. Vrai.

Pour tout réel x, on a $\sin(x) \geq -1$.
Donc $f(x) \geq \sqrt{2}\,x - 2$.
Or la limite de $\sqrt{2}\,x - 2$ en $+\infty$ est $+\infty$.
Donc, par théorème de comparaison, la limite de $f(x)$ en $+\infty$ est $+\infty$.

6. Vrai.

$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{2}\,x + 2\sin x}{x}$

Or, pour tout réel x, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

Donc $\frac{\sqrt{2}\,x - 2}{x} \leq \frac{\sqrt{2}\,x + 2\sin x}{x} \leq \frac{\sqrt{2}\,x + 2}{x}$ pour tout réel x strictement positif.

Donc $\sqrt{2} - \frac{2}{x} \leq f(x) \leq \sqrt{2} + \frac{2}{x}$ pour tout réel x strictement positif.
Or la limite de $\frac{2}{x}$ en $+\infty$ est 0.
Donc, par théorème d'encadrement, la limite de $f(x)$ en $+\infty$ est $\sqrt{2}$.