Sujet D

1. L'aire est égale à $\frac{1}{2} \times AH \times HM$.

Or, $AH = AO + OH = 1 + \cos \alpha$ et $HM = \sin \alpha$.

D'où le résultat.

2. $\mathcal{A}'(\alpha) = \frac{1}{2} \cos \alpha \times (1 + \cos \alpha) + (\frac{1}{2} \sin \alpha) \times (-\sin \alpha)$

$= \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$

$= \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} (1 - \cos^2 \alpha)$

$= \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha$

$= \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2}$.

3. a. Le discriminant de $P(x)$ est $\Delta = (\frac{1}{2})^2 - 4 \times 1 \times (-\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$.

$\Delta > 0$ donc $P(x)$ admet deux racines :

$$X_1 = \frac{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \times 1} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \frac{-\frac{4}{2}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$X_2 = \frac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \times 1} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{2}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Par conséquent, $P(x) = (X - 0{,}5)\,(X + 1)$.

b. On remarque que l'on a $\mathcal{A}'(\alpha) = P(\cos \alpha)$.

Donc $\mathcal{A}'(\alpha) = (\cos \alpha - 0{,}5)\,(\cos \alpha + 1)$.

4. Pour tout réel x de $]0 ; \frac{\pi}{2}]$, $\cos \alpha + 1 \geq 0$ (car $\cos \alpha \geq -1$).

Donc le signe de $\mathcal{A}'(\alpha)$ est celui de $\cos \alpha - 0{,}5$.

$\cos \alpha - 0{,}5 \leq 0$ équivaut à $\cos \alpha \leq 0{,}5$.

Or $0{,}5 = \cos \left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Donc, sur $]0 ; \frac{\pi}{2}]$, $\cos \alpha \leq 0{,}5$ équivaut à $\alpha \in [\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{2}]$.

Donc $\mathcal{A}'(\alpha) \geq 0$ sur $]0 ; \frac{\pi}{3}]$ et $\mathcal{A}'(\alpha) \leq 0$ sur $[\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{2}]$.

5. La fonction $\mathcal{A}$ est croissante sur $]0 ; \frac{\pi}{3}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{2}]$.

De plus, $\mathcal{A}(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ et $\mathcal{A}(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$.

D'où le tableau de variation de $\mathcal{A}$ sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$:

α	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\mathcal{A}(\alpha)$	$\|$ $\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$ $\frac{1}{2}$

6. Par lecture du tableau précédent, l'aire est maximale pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et cette aire vaut $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.