126 **1.** Pour tout réel x de $[-\pi ; \pi]$, on a :
$(2 \cos(x) - 1)(\cos(x) + 1) = 2 \cos^2(x) + 2 \cos(x) - \cos(x) - 1 = 2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1$.

2. • $2 \cos(x) - 1 \leq 0$ équivaut à $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$. Or $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$.
Donc $2 \cos(x) - 1 \leq 0$ pour $(x) \in [-\pi ; -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3} ; \pi]$
et $2 \cos(x) - 1 \geq 0$ pour $(x) \in [-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}]$.
• Comme $\cos(x) \geq -1$ pour tout réel x de $[-\pi ; \pi]$, $\cos(x) + 1 \geq 0$.
De plus, $\cos(x) + 1 = 0$ équivaut à $\cos(x) = -1$, ce qui équivaut à $x = -\pi$ ou $x = \pi$.

3. On dresse un tableau de signes de $f(x)$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$2 \cos x - 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\cos(x) + 1$	0	$+$		$+$		$+$	0
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

$2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1 \geq 0$ équivaut à $(2 \cos(x) - 1)(\cos(x) + 1) \geq 0$.
D'après le tableau de signes précédent, $\mathscr{S} = [-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}] \cup \{-\pi ; \pi\}$.