Sujet D

1. L'équation différentielle $y' = -0{,}124y$ est de la forme $y' = ay$ avec $a = -0{,}124$.
Les fonctions solutions de cette équation **(E)** sont de la forme $t \mapsto Ce^{at}$, où C est une constante réelle, c'est-à-dire ici $t \mapsto Ce^{-0{,}124t}$.

2. $f(0) = 15{,}3$ équivaut à $Ce^0 = 15{,}3$ soit $C = 15{,}3$.
Donc la solution f de **(E)** vérifiant la condition initiale $f(0) = 15{,}3$ a pour expression $f(t) = 15{,}3e^{-0{,}124t}$.

3. $\lim\limits_{t \to +\infty} (e^{-0{,}124t}) = \lim\limits_{X \to -\infty} (e^X) = 0$.
D'où $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$: la concentration en carbone 14 présent dans un organisme devient négligeable au fil du temps.

4. La concentration en carbone 14 des fragments d'os est égale à 7,27 unités à l'instant t tel que $f(t) = 7{,}27$.
$f(t) = 7{,}27$ équivaut à $15{,}3e^{-0{,}124t} = 7{,}27$, soit $e^{-0{,}124t} = \frac{7{,}27}{15{,}3}$, soit $-0{,}124t = \ln\left(\frac{7{,}27}{15{,}3}\right)$, ce qui équivaut encore à $t = \frac{-1}{0{,}124}\ln\left(\frac{7{,}27}{15{,}3}\right)$.
Le nombre $\frac{-1}{0{,}124}\ln\left(\frac{7{,}27}{15{,}3}\right)$ vaut 6,0008 à 10^{-4} près : l'âge de ces fragments d'os est donc environ 6 milliers d'années, ce qui donne bien environ 6 000 ans.

5. La concentration en carbone 14 d'un organisme devient inférieure à 0,3 % de sa valeur initiale à un instant t tel que $N(t) < \frac{0{,}3}{100} \times 15{,}3$, soit $15{,}3e^{-0{,}124t} < 0{,}003 \times 15{,}3$, ce qui équivaut à $e^{-0{,}124t} < 0{,}003$ soit $-0{,}124t < \ln(0{,}003)$.
$-0{,}124t < \ln(0{,}003)$ équivaut à $t > \frac{-\ln(0{,}003)}{0{,}124}$.
Le nombre $\frac{-\ln(0{,}003)}{0{,}124}$ vaut environ 46,8.
C'est donc à partir de 46 800 ans qu'un organisme ne peut plus être daté au carbone 14.