138 **a.** On modifie d'abord l'expression de f sur $]0\,;+\infty[$: $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\ln(x)}{x} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{x}$.

En posant $u(x) = \ln(x)$, on a $u'(x) = \frac{1}{x}$ et ainsi $\frac{\ln(x)}{x} = u'(x)\,u(x)$.

Une primitive de $u'u$ est $\frac{1}{2}u^2$, donc une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est $x \longmapsto (\ln(x))^2$.

Puisqu'une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est $x \longmapsto \ln(x)$, on en déduit une primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$:

$F(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 - \frac{3}{2}\ln(x)$.

b. On modifie l'expression de g sur $]0\,;+\infty[$.

$g(x) = x - 4 + \frac{6}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$, d'où $g(x) = x - 4 + \frac{6}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ car $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

On en déduit une primitive G de g sur $]0\,;+\infty[$: $G(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6\ln(x) + 2\sqrt{x}$.

c. On modifie l'expression de h sur $\mathbb{R}$.

$h(x) = \frac{e^{-2x}}{(e^{-2x}+4)^3}$, car $\frac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$ et donc $h(x) = e^{-2x}(e^{-2x}+4)^{-3}$.

En posant $u(x) = e^{-2x} + 4$, on a $u'(x) = -2e^{-2x}$.

Ainsi : $h(x) = -\frac{1}{2}u'(x)\,(u(x))^{-3}$.

Une primitive de $u'u^{-3}$ est $\frac{1}{-3+1}u^{-3+1}$, c'est-à-dire $-\frac{1}{2}u^{-2}$.

D'où une primitive de h sur $\mathbb{R}$: $H(x) = -\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}(e^{-2x}+4)^{-2}$, soit $H(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{(e^{-2x}+4)^2}$.