146 **1.** Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont de la forme $t \mapsto Ce^{at}$, où C est une constante réelle. Ainsi, $N(t) = Ce^{at}$.
$N(0) = Ce^0 = C$. Puisque $N(0) = 10^9$, on a $C = 10^9$.
On en déduit : $N(t) = 10^9\ e^{at}$.

2. Le nombre de noyaux radioactifs a diminué de moitié au bout de 18 jours, donc $N(18) = \frac{10^9}{2}$. Puisque $N(18) = 10^9\ e^{18a}$, on en déduit $10^9\ e^{18a} = \frac{10^9}{2}$, soit $e^{18a} = \frac{1}{2}$.
$e^{18a} = \frac{1}{2}$ équivaut à $18a = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ soit $18a = -\ln(2)$, soit $a = -\frac{\ln(2)}{18}$.

3. On cherche le nombre t de jours tel que $N(t) < 100$.
$N(t) < 100$ équivaut à $10^9\ e^{at} < 100$, soit $e^{at} < 10^{-7}$, soit $at < \ln(10^{-7})$.
Puisque $a = -\frac{\ln(2)}{18}$, cette inéquation équivaut à $-\frac{\ln(2)}{18}\,t < -7\ln(10)$.
On change le sens de l'inégalité car $-\frac{\ln(2)}{18}$ est négatif.
On obtient : $t > \frac{126\ln(10)}{\ln(2)}$, et $\frac{126\ln(10)}{\ln(2)} \approx 418{,}6$.
Puisque le nombre de jours t est entier, on doit avoir : $t \geq 419$.
Le nombre de noyaux sera inférieur à 100 au bout de 419 jours.