Chapitre 9
Primitives et équations différentielles

Revoir des points essentiels

150 **1.** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -9x^2 + 5x + 10$ est de la forme $u + v + w$ avec u, v et w définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = -9x^2$, $v(x) = 5x$ et $w(x) = 10$.
On sait qu'une primitive d'une constante a est la fonction $x \mapsto ax$, une primitive de la fonction $x \longmapsto x$ est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}x^2$ et une primitive de la fonction $x \longmapsto x^2$ est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{3}x^3$.
On peut alors trouver une primitive de chacune des fonctions u, v et w ; ce sont les fonctions U, V et W définies sur $\mathbb{R}$ par : $U(x) = (-9) \times \frac{1}{3}x^3 = -3x^3$, $V(x) = 5 \times \frac{1}{2}x^2 = \frac{5}{2}x^2$ et $W(x) = 10x$.
Donc une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -3x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 10x$.

2. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^4 + 7x^2 + 4x - 6$ est de la forme $u + v + w + t$, avec u, v, w et t définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x^4$, $v(x) = 7x^2$, $w(x) = 4x$ et $t(x) = -6$.
On sait qu'une primitive d'une constante a est la fonction $x \mapsto ax$, une primitive de la fonction $x \longmapsto x$ est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}x^2$, une primitive de la fonction $x \longmapsto x^2$ est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{3}x^3$ et une primitive de la fonction $x \longmapsto x^4$ est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{5}x^5$.
On peut alors trouver une primitive de chacune des fonctions u, v, w et t ;
ce sont les fonctions U, V, W et T définies sur $\mathbb{R}$ par : $U(x) = 2 \times \frac{1}{5}x^5 = \frac{2}{5}x^5$,
$V(x) = 7 \times \frac{1}{3}x^3 = \frac{7}{3}x^3$, $W(x) = 4 \times \frac{1}{2}x^2 = 2x^2$ et $T(x) = -6x$.
Donc une primitive de la fonction g est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :
$G(x) = \frac{2}{5}x^5 + \frac{7}{3}x^3 + 2x^2 - 6x$.

3. La fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = 3x - \frac{8}{x}$ est de la forme $u + v$ avec u et v définies sur $]0\,;+\infty[$ par : $u(x) = 3x$ et $v(x) = -\frac{8}{x}$.
On sait qu'une primitive de la fonction $x \longmapsto x$ est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}x^2$ et une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est la fonction $x \longmapsto \ln(x)$.
On peut alors trouver une primitive de chacune des fonctions u et v ; ce sont les fonctions U et V définies sur $]0\,;+\infty[$ par : $U(x) = 3 \times \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^2$ et $V(x) = (-8) \times \ln(x) = -8\ln(x)$.
Donc une primitive de la fonction h est la fonction H définie sur $]0\,;+\infty[$ par
$H(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8\ln(x)$.

4. La fonction j définie sur]0 ; +∞[par $j(x) = -\frac{6}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ est de la forme $u + v$ avec u et v définies sur]0 ; +∞[par : $u(x) = -\frac{6}{x^2}$ et $v(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

On sait qu'une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est la fonction $x \longmapsto -\frac{1}{x}$ et une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est la fonction $x \longmapsto 2\sqrt{x}$.

On peut alors trouver une primitive de chacune des fonctions u et v ; ce sont les fonctions U et V définies sur]0 ; +∞[par : $U(x) = (-6) \times \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x}$ et $V(x) = 2\sqrt{x}$.

Donc une primitive de la fonction j est la fonction J définie sur]0 ; +∞[par $J(x) = \frac{6}{x} + 2\sqrt{x}$.

5. La fonction p définie sur $\left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$ par $p(x) = \frac{2}{2x-3}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec u définie par : $u(x) = 2x - 3$.

Or, on sait qu'une primitive d'une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ avec u strictement positive est la fonction ln (u). Ici u est strictement positive sur $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$, donc une primitive de la fonction p est la fonction P définie sur $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$ par $P(x) = \ln(2x - 3)$.

6. La fonction q définie sur $\mathbb{R}$ par $q(x) = \frac{2x}{x^2+5}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^2 + 5$.

Or, on sait qu'une primitive d'une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ avec u strictement positive est la fonction ln (u). Ici u est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc une primitive de la fonction q est la fonction Q définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(x) = \ln(x^2 + 5)$.

151 **1.** L'équation différentielle $y' + 4y = 5$ équivaut à l'équation différentielle $y' = -4y +$; cette équation est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -4$ et $b = 5$.
On cherche la solution particulière constante de cette équation de la forme $p(x) = k$.
Puisque la fonction p est une solution de l'équation différentielle (E) on a :
$p'(x) = -4p(x) + 5$ pour tout réel x.
Or, $p'(x) = 0$ donc : $4\,p(x) = 5$, soit $p(x) = \frac{5}{4}$.

La solution constante de (E) est donc la fonction p telle que $p(x) = \frac{5}{4}$.

L'équation différentielle $y' = -4y$ admet pour solutions les fonctions $x \longmapsto C\,e^{-4x}$ avec C réel.
On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = C\,e^{-4x} + \frac{5}{4}$, avec C constante réelle.

2. L'équation différentielle $y' = -3y + 2$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -3$ et $b = 2$.
On cherche la solution particulière constante de (E) : $y' = -3y + 2$, de la forme $p(x) = k$.

Puisque la fonction p est une solution de cette équation différentielle (E) on a :
$p'(x) = -3p(x) + 2$ pour tout réel x.
Or, $p'(x) = 0$ donc : $3\,p(x) = 2$, soit $p(x) = \frac{2}{3}$.
La solution constante de cette équation est donc la fonction p telle que $p(x) = \frac{2}{3}$.
L'équation différentielle $y' = -3y$ admet pour solutions les fonctions $x \longmapsto C\,e^{-3x}$ avec C réel.
On en déduit que les solutions de cette équation sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = Ce^{-3x} + \frac{2}{3}$, avec C constante réelle.

3. L'équation différentielle $y' + 7\,y = 14$ équivaut à l'équation différentielle $y' = -7y + 14$; cette équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -7$ et $b = 14$.
On cherche la solution particulière constante de cette équation de la forme $p(x) = k$.
Puisque la fonction p est une solution de l'équation différentielle (E) on a :
$p'(x) = -7p(x) + 14$ pour tout réel x.
Or, $p'(x) = 0$ donc : $7\,p(x) = 14$, soit $p(x) = 2$.
La solution constante de cette équation est donc la fonction p telle que $p(x) = 2$.
L'équation différentielle $y' = -7y$ admet pour solutions les fonctions $x \longmapsto Ce^{-7x}$ avec C réel.
On en déduit que les solutions de cette équation sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = Ce^{-7x} + 2$, avec C constante réelle.

4. L'équation différentielle $y' = 6 - 2y$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -2$ et $b = 6$.
On cherche la solution particulière constante de (E) : $y' = 6 - 2y$, de la forme $p(x) = k$.
Puisque la fonction p est une solution de l'équation différentielle (E) on a :
$p'(x) = 6 - 2p(x)$ pour tout réel x.
Or, $p'(x) = 0$ donc : $6 - 2p(x) = 0$, soit $p(x) = 3$.
La solution constante de (E) est donc la fonction p telle que $p(x) = 3$.
L'équation différentielle $y' = -2y$ admet pour solutions les fonctions $x \longmapsto Ce^{-2x}$ avec C réel.
On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = Ce^{-2x} + 3$, avec C constante réelle.

5. L'équation différentielle $y' = 9y$ admet pour solutions les fonctions $x \longmapsto C\,e^{9x}$ avec C réel.

6. L'équation différentielle $y' - \frac{1}{4}\,y = 1$ équivaut à l'équation différentielle $y' = \frac{1}{4}y + 1$; cette équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = \frac{1}{4}$ et $b = 1$.
On cherche la solution particulière constante de (E) : $y' = \frac{1}{4}\,y + 1$, de la forme $p(x) = k$.
Puisque la fonction p est une solution de l'équation différentielle (E) on a :
$p'(x) = \frac{1}{4}\,p(x) + 1$ pour tout réel x.
Or, $p'(x) = 0$ donc : $-\frac{1}{4}\,p(x) = 1$, soit $p(x) = -4$.
La solution constante de (E) est donc la fonction p telle que $p(x) = -4$.

L'équation différentielle $y' = \frac{1}{4}y$ admet pour solutions les fonctions $x \longmapsto Ce^{\frac{1}{4}x}$ avec C réel.
On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = C\,e^{\frac{1}{4}x} - 4$ avec C constante réelle.

7. L'équation différentielle $y' + 11\,y = 0$ équivaut à l'équation différentielle $y' = -11y$; cette équation différentielle est de la forme $y' = ay$ avec $a = -11$; elle admet pour solutions les fonctions $x \longmapsto Ce^{-11x}$ avec C réel.

8. L'équation différentielle $y' = \frac{y}{2} - 4$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = -4$.
On cherche la solution particulière constante de (E) : $y' = \frac{1}{2}y - 4$, de la forme $p(x) = k$.
Puisque la fonction p est une solution de l'équation différentielle (E) on a :
$p'(x) = \frac{1}{2}p(x) - 4$ pour tout réel x.
Or, $p'(x) = 0$ donc : $\frac{1}{2}p(x) = 4$, soit $p(x) = 8$.
La solution constante de (E) est donc la fonction p telle que $p(x) = 8$.
L'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$ admet pour solutions les fonctions $x \longmapsto Ce^{\frac{1}{2}x}$ avec C réel.
On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} + 8$ avec C constante réelle.