103 **1.** Une suite constante (c_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = 5u_n - 12$ si et seulement si, pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 5c_n - 12$.
Puisque (c_n) est constante, on a, pour tout entier naturel n, $c_n = c$, où c est un réel, et $c_{n+1} = c$.
Ainsi, (c_n) vérifie la relation de récurrence de l'énoncé si, et seulement si, $c = 5c - 12$.
$c = 5c - 12$ équivaut à $-4c = -12$, soit à $c = 3$.
La suite constante (c_n) cherchée est telle que $c_n = 3$ pour tout entier naturel n.
2. Soit la suite (v_n) telle que $v_n = u_n - c_n$, soit $v_n = u_n - 3$ pour tout entier naturel n.
$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = (5u_n - 12) - 3 = 5u_n - 15 = 5(u_n - 3) = 5v_n$.
Puisque $v_{n+1} = 5v_n$ pour tout entier naturel n, (v_n) est une suite géométrique de raison 5.
Ainsi, $v_n = v_0 \times 5^n$.
$v_0 = u_0 - 3 = -2 - 3 = -5$. D'où : $v_n = -5 \times 5^n = -5^{n+1}$.
Puisque $v_n = u_n - 3$, on a $u_n = v_n + 3$, soit $u_n = -5^{n+1} + 3$ pour tout entier naturel n.