**104** **1.** ● On cherche d'abord la solution particulière constante $(c_n)$ qui vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = 0{,}1u_n + 9$.
Celle-ci est telle que, pour tout entier naturel $n$, $c_{n+1} = 0{,}1c_n + 9$.
Puisque $(c_n)$ est constante, on a, pour tout entier naturel $n$, $c_n = c$, où $c$ est un réel, et $c_{n+1} = c$.
Ainsi, $c = 0{,}1c + 9$, ce qui équivaut à $0{,}9c = 9$, soit $c = 10$.
On en déduit : $c_n = 10$ pour tout entier naturel $n$.
● Soit la suite $(v_n)$ telle que $v_n = u_n - 10$.
$v_{n+1} = u_{n+1} - 10 = (0{,}1u_n + 9) - 10 = 0{,}1u_n - 1 = 0{,}1(u_n - 10) = 0{,}1v_n$.
Puisque $v_{n+1} = 0{,}1v_n$ pour tout entier naturel $n$, $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,1.
$v_0 = u_0 - 10 = 8 - 10 = -2$.
D'où : $v_n = v_0 \times 0{,}1^n = -2 \times 0{,}1^n$.
Puisque $v_n = u_n - 10$, on a $u_n = v_n + 10$, soit $u_n = -2 \times 0{,}1^n + 10$.
**2.** $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}1^n = 0$ car $0 \leq 0{,}1 < 1$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2 \times 0{,}1^n) = 0$.
Par un théorème sur la limite d'une somme, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 10$.