Chapitre 1

Suites

Revoir des points essentiels

90 **1.** $\lim_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$, donc $\lim_{n \to +\infty} 2n^3 = +\infty$.

$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$, donc $\lim_{n \to +\infty} 4n = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} (4n - 7) = +\infty$, car $\lim_{n \to +\infty} -7 = -7$.

Par un théorème sur la limite d'une somme : $\lim_{n \to +\infty} (2n^3 + 4n - 7) = +\infty$.

2. $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$, donc $\lim_{n \to +\infty} -4n = -\infty$.

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, donc $\lim_{n \to +\infty} -2\sqrt{n} = -\infty$.

D'où : $\lim_{n \to +\infty} (-4n - 2\sqrt{n}) = -\infty$.

Comme $\lim_{n \to +\infty} 100 = 100$, on en déduit :

$\lim_{n \to +\infty} (100 - 4n - 2\sqrt{n}) = -\infty$ par un théorème sur la limite d'une somme.

3. $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$, donc $\lim_{n \to +\infty} 3n = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} (3n - 5) = +\infty$.

$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, donc $\lim_{n \to +\infty} -n^2 = -\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} (-n^2 + 4) = -\infty$.

Par un théorème sur la limite d'un produit : $\lim_{n \to +\infty} w_n = -\infty$.

4. $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$, donc $\lim_{n \to +\infty} (n + 5) = +\infty$.

Comme $\lim_{n \to +\infty} 2 = 2$, un théorème sur la limite d'un quotient donne : $\lim_{n \to +\infty} w_n = 0$.

91 **1.** • On détermine d'abord la suite constante (c_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n + 6$. Celle-ci est telle que, pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 3c_n + 6$.

Puisque (c_n) est constante, on a, pour tout entier naturel n, $c_n = c$, où c est un réel, et $c_{n+1} = c$.

Ainsi, $c = 3c + 6$, ce qui équivaut à $-2c = 6$, soit $c = -3$.

On en déduit : $c_n = -3$, pour tout entier naturel n.

• Soit la suite (v_n) telle que $v_n = u_n - c_n$, c'est-à-dire $v_n = u_n + 3$.

On a : $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = (3u_n + 6) + 3 = 3u_n + 9 = 3(u_n + 3) = 3v_n$.

Puisque $v_{n+1} = 3v_n$ pour tout entier naturel n, (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

Ainsi, $v_n = v_0 \times 3^n$.

$v_0 = u_0 + 3 = 5 + 3 = 8$. D'où : $v_n = 8 \times 3^n$.

Puisque $v_n = u_n + 3$, on a $u_n = v_n - 3$, soit $u_n = 8 \times 3^n - 3$.

2. • On détermine d'abord la suite constante (c_n) vérifiant la relation de récurrence
$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - 1$. Celle-ci est telle que, pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = \frac{1}{2} c_n - 1$.
Puisque (c_n) est constante, on a, pour tout entier naturel n : $c_n = c$, où c est un réel, et $c_{n+1} = c$.
Ainsi, $c = \frac{1}{2} c - 1$, ce qui équivaut à $\frac{1}{2} c = -1$, soit $c = -2$.
On en déduit : $c_n = -2$, pour tout entier naturel n.
• Soit la suite (v_n) telle que $v_n = u_n - c_n$, c'est-à-dire $v_n = u_n + 2$.
On a : $v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = \left(\frac{1}{2} u_n - 1\right) + 2 = \frac{1}{2} u_n + 1 = \frac{1}{2} (u_n + 2) = \frac{1}{2} v_n$.
Puisque $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ pour tout entier naturel n, (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
Ainsi, $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
$v_0 = u_0 + 2 = -2 + 2 = 0$.
D'où : $v_n = 0 \times 3^n = 0$ pour tout entier naturel n.
Puisque $v_n = u_n + 2$, on a $u_n = v_n - 2$, soit $u_n = -2$.

3. • On détermine d'abord la suite constante (c_n) vérifiant la relation de récurrence
$u_{n+1} = 5u_n + 4$. Celle-ci est telle que, pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 5c_n + 4$.
Puisque (c_n) est constante, on a, pour tout entier naturel n, $c_n = c$, où c est un réel, et $c_{n+1} = c$.
Ainsi, $c = 5c + 4$, ce qui équivaut à $-4c = 4$, soit $c = -1$.
On en déduit : $c_n = -1$ pour tout entier naturel n.
• Soit la suite (v_n) telle que $v_n = u_n - c_n$, c'est-à-dire $v_n = u_n + 1$.
On a : $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = (5u_n + 4) + 1 = 5u_n + 5 = 5(u_n + 1) = 5v_n$.
Puisque $v_{n+1} = 5v_n$ pour tout entier naturel n, (v_n) est une suite géométrique de raison 5.
Ainsi, $v_n = v_0 \times 5^n$.
$v_0 = u_0 + 1 = 3 + 1 = 4$.
D'où : $v_n = 4 \times 5^n$.
Puisque $v_n = u_n + 1$, on a $u_n = v_n - 1$, soit $u_n = 4 \times 5^n - 1$.