

110 • Pour tout réel $x > 1$, $x^2 - 1 > 0$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x^2 - 1) = 0^+$ et par conséquent $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty$.

On en déduit que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (2 + \frac{1}{x^2 - 1}) = +\infty$.

On peut conclure en utilisant un théorème de comparaison :

pour tout réel $x > 1$, on a : $2 + \frac{1}{x^2 - 1} \leq f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (2 + \frac{1}{x^2 - 1}) = +\infty$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$.

• Pour tout réel $x > 1$, on a : $2 + \frac{1}{x^2 - 1} \leq f(x) \leq 2 + \frac{1}{x - 1}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$ et par conséquent $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \frac{1}{x^2 - 1}) = 2$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - 1} = 0$ et par conséquent $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \frac{1}{x - 1}) = 2$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \frac{1}{x^2 - 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \frac{1}{x - 1}) = 2$

donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.