**115** **1.** $\lim\limits_{x\to 0}(2e^x+1)=3$

et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}(e^x-1)=0^+$ car si $x>0$, $e^x>1$ et donc $e^x-1>0$.

Donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$.

**2. a.** Pour tout réel $x$ de $]0\,;+\infty[$,

$f(x)=\dfrac{2e^x+1}{e^x-1}=\dfrac{e^{-x}(2e^x+1)}{e^{-x}(e^x-1)}=\dfrac{2+e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

**b.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2+e^{-x})=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-x})=1$.

Donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

**3.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x=0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées, est une asymptote à $C_f$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ donc la droite d'équation $y=2$ est une asymptote à $C_f$ en $+\infty$.

**4. a.** Pour tout réel $x$ de $]0\,;+\infty[$,

$f=\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=2e^x+1$ et $v(x)=e^x-1$

$u'(x)=2e^x$ et $v'(x)=e^x$.

$f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ donc $f'(x)=\dfrac{2e^x(e^x-1)-(2e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{2(e^x)^2-2e^x-2(e^x)^2-e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{-3e^x}{(e^x-1)^2}$

**b.** Pour tout réel $x$ de $]0\,;+\infty[$, $f'(x)<0$ donc $f$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

**c.**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
| --- | --- | --- |
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ $2$ |