93 **1.** D'après l'énoncé, $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Cette expression est de la forme $\frac{1}{v}$ avec $v(x) = 1 - x$.

Dès lors, l'expression de la dérivée f' de f est de la forme $\frac{-v'}{v^2}$, avec $v'(x) = -1$.

On en déduit l'expression $f'(x) = \frac{-(-1)}{(1-x)^2}$ soit $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

L'expression de $f'(x)$ est de la forme $\frac{1}{v}$ avec $v(x) = (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$.

Dès lors, l'expression de la dérivée seconde f'' de f est de la forme $\frac{-v'}{v^2}$,

avec $v'(x) = -2 + 2x = -2(1-x)$.

On en déduit l'expression $f''(x) = \frac{-(-2(1-x))}{((1-x)^2)^2}$ soit $f''(x) = \frac{2(1-x)}{(1-x)^4}$ d'où $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$.

2. Puisque $2 > 0$, f'' est du signe de son dénominateur.
Or $(1-x)^3 > 0$ sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$. On en déduit que la dérivée seconde f'' est strictement positive sur cet intervalle donc f est convexe sur $]-\infty\,;1[$.

3. $f(0) = \frac{1}{1-0} = 1$ et $f'(0) = \frac{1}{(1-0)^2} = 1$
La tangente T à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
Grâce aux calculs précédents, l'équation de T est donc $y = x + 1$.

4. D'après la question **2.**, la fonction f est convexe sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$. Cela signifie que la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de ses tangentes sur cet intervalle. En particulier, la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la tangente T d'équation $y = x + 1$. On en déduit que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;1[$, on a $f(x) \geq x + 1$ c'est-à-dire $\frac{1}{1-x} \geq x + 1$.