Chapitre 3
Continuité et convexité

Revoir des points essentiels

77 D'après l'énoncé, $f(x) = x^3 - 12x + 3$.

• On commence par établir le tableau de variation de f sur l'intervalle [2 ; 5].•

L'expression de sa dérivée est : $f'(x) = 3x^2 - 12$

$$= 3(x^2 - 4)$$

$$= 3(x - 2)(x + 2).$$

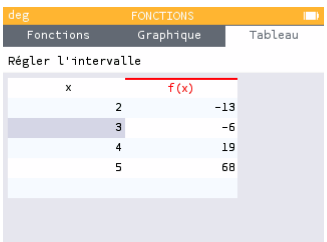
Puisque x est un réel de l'intervalle [2 ; 5], le produit $3(x + 2)$ est positif.
On en déduit que $f'(x)$ est du signe de l'expression $(x - 2)$.
Cela permet d'établir le tableau ci-dessous :

x	2		5
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	-13	↗	68

• On utilise ensuite le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires en rappelant les conditions.

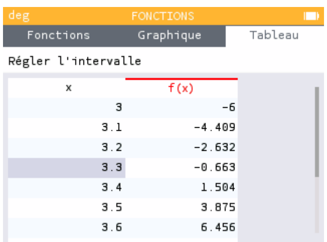
Sur l'intervalle [2 ; 5], le tableau de variation indique que la fonction f est continue et strictement croissante.
De plus, $f(2) = -13$ et $f(5) = 68$ donc 0 est compris entre $f(2)$ et $f(5)$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle [2 ; 5].

a. On commence le balayage à $x = 2$ avec un pas de 1.



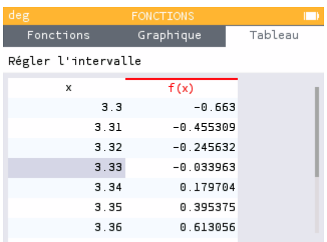
x	f(x)
2	-13
3	-6
4	19
5	68

b. On forme ensuite un tableau de valeurs de $f(x)$ sur [3 ; 4] avec un pas de 0,1.



x	f(x)
3	-6
3.1	-4.409
3.2	-2.632
3.3	-0.663
3.4	1.504
3.5	3.875
3.6	6.456

c. On recommence à partir de $x = 3{,}3$ avec un pas de 0,01.



x	f(x)
3.3	-0.663
3.31	-0.455309
3.32	-0.245632
3.33	-0.033963
3.34	0.179704
3.35	0.395375
3.36	0.613056

À l'aide de la calculatrice, $3{,}33 < \alpha < 3{,}34$.

78 D'après l'énoncé, $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 30$.

• **On commence par établir le tableau de variation de f sur l'intervalle [–2 ; 0].**

L'expression de sa dérivée est : $f'(x) = -6x^2 + 18x = 6x(-x+3)$.

Puisque x est un réel de l'intervalle [–2 ; 0], le facteur $(-x + 3)$ est positif.

On en déduit que $f'(x)$ est du signe de l'expression $6x$.

Cela permet d'établir le tableau ci-contre.

x	-2		0
$f'(x)$		$-$	0
$f(x)$	22	$\searrow$	-30

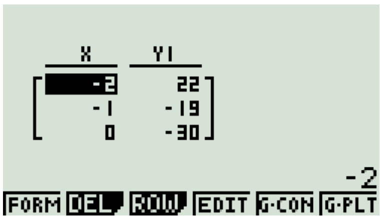
• **On utilise ensuite le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires en rappelant les conditions.**

Sur l'intervalle [–2 ; 0], le tableau de variation indique que la fonction f est continue et strictement décroissante.

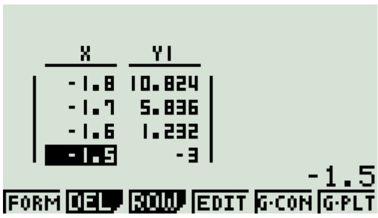
De plus, $f(-2) = 22$ et $f(0) = -30$ donc 0 est compris entre $f(0)$ et $f(-2)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle [–2 ; 0].

a. On commence le balayage à $x = -2$ avec un pas de 1.



b. On forme ensuite un tableau de valeurs de $f(x)$ sur [–2 ; –1] avec un pas de 0,1.



À l'aide de la calculatrice, $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$.

79 D'après l'énoncé, $f(x) = x^3 - 5x + 2$.

L'expression de la dérivée de f est : $f'(x) = 3x^2 - 5$.

L'expression de la dérivée seconde de f est : $f''(x) = 6x$.

$6x \geq 0$ équivaut à $x \geq 0$. On en déduit le tableau ci-contre.

Sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$, f'' est négative donc f est concave.

Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, f'' est positive donc f est convexe.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	concave		convexe

80 D'après l'énoncé, $f(x) = 3x^4 - 6x^3 - 4$.

L'expression de sa dérivée est : $f'(x) = 12x^3 - 18x^2$.

L'expression de sa dérivée seconde est : $f''(x) = 36x^2 - 36x = 36x(x-1)$.

$f''(x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont 0 et 1 et pour lequel le coefficient de x^2 est positif. On en déduit le tableau ci-contre.

Sur les intervalles $]-\infty ; 0]$ et $[1 ; +\infty[$, f'' est positive donc f est convexe.

Sur l'intervalle $[0 ; 1]$, f'' est négative donc f est concave.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	convexe		concave		convexe