158 **1.** On calcule le discriminant de cette équation du second degré :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36.$$

L'équation $x^2 - 4x - 5 = 0$ a donc deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{4-\sqrt{36}}{2} = \frac{4-6}{2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{4+\sqrt{36}}{2} = \frac{4+6}{2} = 5.$$

2. a. Pour $x > 0$, on pose $X = \ln(x)$.
L'équation devient $X^2 - 4X - 5 = 0$ et on déduit d'après la question 1 que $X = -1$ ou $X = 5$.
$X = -1$ équivaut à $\ln(x) = -1$ donc à $x = e^{-1}$.
$X = 5$ équivaut à $\ln(x) = 5$ donc à $x = e^5$.
Comme les réels e^{-1} et e^5 appartiennent à $]0\,;+\infty[$, l'équation a donc deux solutions : e^{-1} et e^5.

b. $\ln(x-3)$ et $\ln(x-1)$ existent si et seulement si $x - 3 > 0$ et $x - 1 > 0$ ce qui équivaut à $x > 3$ et $x > 1$, soit à $x > 3$.
Pour x appartient à $]3\,;+\infty[$, l'équation équivaut à $\ln\big((x-3)(x-1)\big) = \ln(2^3)$
soit à $\ln(x^2 - 4x + 3) = \ln(8)$ donc à $x^2 - 4x + 3 = 8$ et à $x^2 - 4x - 5 = 0$.
On en déduit que $x = -1$ ou $x = 5$ mais comme x appartient à $]3\,;+\infty[$, l'équation a pour unique solution $x = 5$.

c. $\ln(x^2 - 4x)$ existe si et seulement si $x^2 - 4x > 0$. Comme $x^2 - 4x = x(x-4)$, le polynôme du second degré $x^2 - 4x$ a pour racine 0 et 4. Le coefficient de x^2 de ce polynôme est positif, donc on déduit que $x^2 - 4x > 0$ pour x appartenant à $]-\infty\,;0[\, \cup\,]4\,;+\infty[$.
Pour x appartenant à $]-\infty\,;0[\, \cup\,]4\,;+\infty[$, l'équation équivaut à $x^2 - 4x = 5$
donc à $x^2 - 4x - 5 = 0$.
On en déduit que $x = -1$ ou $x = 5$. Ces deux réels appartiennent à $]-\infty\,;0[\, \cup\,]4\,;+\infty[$, donc l'équation a deux solutions : -1 et 5.

d. L'équation équivaut à $e^{2x} - 4e^x - 5 = 0$. Pour tout réel x on pose $X = e^x$, on a donc $X^2 = e^{2x}$.
L'équation devient $X^2 - 4X - 5 = 0$ et on déduit d'après la question 1 que $X = -1$ ou $X = 5$.
$X = -1$ équivaut à $e^x = -1$ cette équation n'a pas de solution car $e^x > 0$ pour tout réel x.
$X = 5$ équivaut à $e^x = 5$ donc à $x = \ln(5)$.
L'équation a donc une unique solution : $\ln(5)$.