170

Partie A

1. Le point A(1 ; –1) appartient à la courbe *C* donc $f(1) = -1$.
La tangente à *C* en son point d'abscisse 1, c'est-à-dire en A, est la droite *T*.
Le nombre dérivé $f'(1)$ est le coefficient directeur de *T* donc $f'(1) = -2$.

2. a. $f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{a}{x^2}$.
b. $f'(1) = -2$ donc $\frac{2}{1} - \frac{a}{1^2} = -2$ d'où $2 - a = -2$ soit $-a = -4$ donc $a = 4$.
$f(1) = -1$ donc $2\ln(1) + \frac{4}{1} + b = -1$ d'où $4 + b = -1$ soit $b = -5$.

Partie B

1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(x) + \frac{4}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
b. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à *C*.

2. Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} = \frac{2x-4}{x^2}$.
Comme pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $x^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2x - 4$.
$2x - 4 < 0$ équivaut à $2x < 4$ donc à $x < \frac{4}{2}$ soit à $x < 2$.
Ainsi :
pour x appartient à $]0\,;2[$, $f'(x) < 0$: f est donc strictement décroissante sur $]0\,;2[$.
pour x appartient à $]2\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$: f est donc strictement croissante sur $]2\,;+\infty[$.

3. Sur l'intervalle $]0\,;2[$, f est continue et strictement décroissante, $0 \in \left]f(2)\,;\lim\limits_{x\to 0} f(x)\right[$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.
Sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$, f est continue et strictement croissante, $0 \in \left]f(2)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.