Chapitre 7
Calcul intégral

Revoir des points essentiels

86 **a.** J = $\int_{-2}^{4}(9x^2+8x-1)dx = [3x^3+4x^2-x]_{-2}^{4}$
$= 3\times 4^3+4\times 4^2-4-\left(3\times(-2)^3+4\times(-2)^2-(-2)\right)$
$= 252-(-6)$
$= 258.$

b. K = $\int_{-1}^{2}(2x+2)(x^2+2x-5)^3dx = \left[\frac{1}{4}(x^2+2x-5)^4\right]_{-1}^{2}$
$= \dfrac{1}{4}(2^2+4-5)^4-\dfrac{1}{4}(1-2-5)^4$
$= \dfrac{3^4}{4}-\dfrac{(-6)^4}{4}$
$= 20{,}25-324$
$= -303{,}75.$

c. L = $\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-x}dx = [-\mathrm{e}^{-x}]_{-1}^{0} = -\mathrm{e}^0-(-\mathrm{e}) = -1+\mathrm{e}.$

d. M = $\int_{-1}^{2}\frac{5x}{x^2+1}dx = \left[\frac{5}{2}\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{2}$
$= \dfrac{5}{2}\ln(2^2+1)-\dfrac{5}{2}\ln((-1)^2+1) = \dfrac{5}{2}\ln(5)-\dfrac{5}{2}\ln(2)$
$= \frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right).$

87 **a.** J = $\int_{1}^{2}\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{1}{x}\right]_{1}^{2} = \frac{2^4}{4}-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}-1\right) = 4-0{,}5+0{,}75 = 4{,}25.$

b. K = $\int_{-2}^{1}x^2(x^3+3)^2dx = \left[\frac{1}{9}(x^3+3)^3\right]_{-2}^{1} = \frac{4^3}{9}-\frac{(-5)^3}{9} = \frac{64}{9}-\left(\frac{-125}{9}\right) = \frac{189}{9} = 21.$

c. L = $\int_{4}^{5}\frac{1}{3x+2}dx = \left[\frac{1}{3}\ln(3x+2)\right]_{4}^{5} = \frac{1}{3}\ln(17)-\frac{1}{3}\ln(14) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{17}{14}\right).$

d. M = $\int_{1}^{2}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}dx = [\ln(\mathrm{e}^x-1)]_1^2 = \ln(\mathrm{e}^2-1)-\ln(\mathrm{e}-1)$
$= \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}-1}\right) = \ln\left(\frac{(\mathrm{e}-1)(\mathrm{e}+1)}{\mathrm{e}-1}\right) = \ln(\mathrm{e}+1).$

88 Soit $x \in [1 ; 2]$ alors $1 \leq x^2 \leq 4$. Par conséquent, $x^2 - 1 \geq 0$.
La fonction f est continue et positive sur $[1 ; 2]$.
On note $\mathscr{A}$ l'aire, en u.a., de la surface délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
Alors $\mathscr{A} = \int_1^2 f(x)dx$ u.a.
Or, $\int_1^2 f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 1 = \frac{4}{3}$.
Donc $\mathscr{A} = \frac{4}{3}$ u.a.

89 Pour $x \in [-2 ; 0]$, on a $x \leq 0$.
De plus, $x^2 \leq 4$ et donc $x^2 - 4 \leq 0$. Ainsi, $x(x^2 - 4) \geq 0$.
La fonction g est continue et positive sur $[-2 ; 0]$.
On note $\mathscr{A}$ l'aire, en u.a., de la surface délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.
Alors $\mathscr{A} = \int_{-2}^0 g(x)dx$ u.a.
Or, $\int_{-2}^0 g(x)dx = \left[\frac{1}{4}(x^2 - 4)^2\right]_{-2}^0 = \frac{16}{4} - 0 = 4$.
Donc $\mathscr{A} = 4$ u.a.