109 **1.** On a $P(X = k) \leq 0{,}01$ à partir de k = 13 :
en effet $P(X = 12) = (1 - \frac{1}{4})^{11} \times \frac{1}{4} \approx 0{,}0106$ et $P(X = 13) = (1 - \frac{1}{4})^{12} \times \frac{1}{4} \approx 0{,}008$.

2. L'événement contraire de $\{X \leq 20\}$ est l'événement $\{X > 20\}$.
On a donc $P_{X>11}(X \leq 20) = 1 - P_{X>11}(X > 20)$.
Or en utilisant l'absence de mémoire d'une loi géométrique, $P_{X>11}(X > 20) = P(X > 9)$.
Donc $P_{X>11}(X \leq 20) = 1 - P(X > 9) = P(X \leq 9)$ car $\{X > 9\}$ et $\{X \leq 9\}$ sont des événements contraires.
En suivant un raisonnement similaire à celui de l'exercice 108 page 215, on a :

$$P(X \leq 9) = P(X = 1) + \cdots + P(X = 9) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \cdots + \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^8$$

$$= \frac{1}{4}(1 + \frac{3}{4} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^8) = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^9}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^9}{\frac{1}{4}} = 1 - \frac{3}{4}^9 \approx 0{,}92.$$