110 **1. a.** La variable aléatoire X a pour densité de probabilité la fonction f, donc $P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Pour calculer cette intégrale, on doit trouver une primitive de f.

Il suffit de prendre la fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 4] par $F(x) = \frac{1}{8} \times \frac{x^2}{2}$, soit $F(x) = \frac{x^2}{16}$.

Ainsi, $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = F(2) - F(1)$.

Or, $F(2) = \frac{2^2}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ et $F(1) = \frac{1^2}{16} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$.

Donc $F(2) - F(1) = 0{,}25 - 0{,}0625 = 0{,}1875 \approx 0{,}188$ à 10^{-3} près.

Ainsi, $P(1 \leq X \leq 2) \approx 0{,}188$.

b. La variable aléatoire X est à densité sur l'intervalle [0 ; 4], donc $P(X < 3) = P(X \leq 3) = P(0 \leq X \leq 3)$.

Or, $P(0 \leq X \leq 3) = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(0)$, avec F la fonction primitive de f définie dans la question précédente.

De plus, $F(3) = \frac{3^2}{16} = \frac{9}{16}$ et $F(0) = \frac{0^2}{16} = 0$. Ainsi, $P(X < 3) = \frac{9}{16} \approx 0{,}563$.

c. La variable aléatoire X est à densité sur l'intervalle [0 ; 4], donc $P(X > 2) = P(X \geq 2) = P(2 \leq X \leq 4)$.

Or, $P(2 \leq X \leq 4) = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = F(4) - F(2)$, avec F la fonction primitive de f définie dans la question **1. a**.

De plus, $F(4) = \frac{4^2}{16} = \frac{16}{16} = 1$ et $F(2) = \frac{2^2}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Ainsi, $P(X > 2) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

2. La variable aléatoire X est à densité sur l'intervalle [0 ; 4] et la densité de probabilité est la fonction f, donc $E(X) = \int_0^4 xf(x)\,\mathrm{d}x$.

Ici, on a donc $E(X) = \int_0^4 x \times \frac{1}{8}x\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \frac{x^2}{8}\,\mathrm{d}x$.

Pour calculer cette intégrale, il faut alors trouver une primitive de la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 4] par $g(x) = \frac{x^2}{8}$. Il suffit de prendre la fonction G définie sur l'intervalle [0 ; 4] par $G(x) = \frac{1}{8} \times \frac{x^3}{3}$, soit $G(x) = \frac{x^3}{24}$. Ainsi, $\int_0^4 \frac{x^2}{8}\,\mathrm{d}x = G(4) - G(0)$.

Or, $G(4) = \frac{4^3}{24} = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}$ et $G(0) = \frac{0^3}{24} = 0$.

Donc $\int_0^4 \frac{x^2}{8}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$, donc $E(X) = \frac{8}{3}$.

3. La variable aléatoire X est à densité sur l'intervalle [0 ; 4] et la densité de probabilité est la fonction f, donc $V(X) = \int_0^4 \left(x - E(X)\right)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ici, avec $E(X) = \frac{8}{3}$ et $f(x) = \frac{1}{8}x$, on a alors $V(X) = \int_0^4 \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 \times \frac{1}{8}x\,\mathrm{d}x$.

Si on note h la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 4] par $h(x) = \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 \times \frac{1}{8}x$, alors on doit trouver une primitive de h pour calculer l'intégrale.

Pour cela, on cherche l'expression développée de h. On développe d'abord l'expression $\left(x-\frac{8}{3}\right)^2$: $\left(x-\frac{8}{3}\right)^2 = x^2 - 2\times x\times\frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3}\right)^2 = x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{64}{9}$. Ainsi, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 4], $h(x) = \left(x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{64}{9}\right)\times\frac{1}{8}x = \frac{x^3}{8} - \frac{16}{24}x^2 + \frac{64}{72}x$,
soit $h(x) = \frac{x^3}{8} - \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x$.
On peut alors prendre comme primitive de h la fonction H définie sur l'intervalle [0 ; 4] par $H(x) = \frac{1}{8}\times\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}\times\frac{x^3}{3} + \frac{8}{9}\times\frac{x^2}{2}$, soit $H(x) = \frac{x^4}{32} - \frac{2x^3}{9} + \frac{4x^2}{9}$.
Ainsi, $\int_0^4 \left(x-\frac{8}{3}\right)^2 \times\frac{1}{8}x\,\mathrm{d}x = \int_0^4 h(x)\,\mathrm{d}x = H(4) - H(0)$.
Or, $H(4) = \frac{4^4}{32} - \frac{2\times 4^3}{9} + \frac{4\times 4^2}{9} = \frac{8}{9}$ et $H(0) = \frac{0^4}{32} - \frac{2\times 0^3}{9} + \frac{4\times 0^2}{9} = 0$.
Donc $\int_0^4 \left(x-\frac{8}{3}\right)^2 \times\frac{1}{8}x\,\mathrm{d}x = \frac{8}{9}$, soit $V(X) = \frac{8}{9}$.