116 **1.** La variable aléatoire X est égale à la durée de fonctionnement sans panne du distributeur, en mois.
De plus, la durée moyenne de fonctionnement sans panne du distributeur est de 10 mois.
Ainsi, $E(X) = 10$.
Or, la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, donc $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.
Des deux égalités précédentes, on déduit $\frac{1}{\lambda} = 10$, soit $\lambda = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

2. On cherche la probabilité que le distributeur n'ait connu aucune panne pendant les six premiers mois, c'est-à-dire la probabilité que la durée de fonctionnement sans panne soit supérieure à six mois. Donc on cherche à calculer $P(X > 6)$.
Or, $P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6)$.
De plus la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}1$, donc
$P(X \leq 6) = 1 - \mathrm{e}^{-6\lambda} = 1 - \mathrm{e}^{-6\times 0{,}1} = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}6}$.
Donc $P(X > 6) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-0{,}6}) = 1 - 1 + \mathrm{e}^{-0{,}6} = \mathrm{e}^{-0{,}6}$, soit $P(X > 6) \approx 0{,}549$.
Donc la probabilité que le distributeur n'ait connu aucune panne pendant les six premiers mois est environ égale à 0,549.

3. On sait que le distributeur n'a connu aucune panne durant les six premiers mois, donc l'évènement $\{X > 6\}$ est réalisé.
On cherche à calculer dans ces conditions la probabilité que ce distributeur ne connaisse pas de panne jusqu'à la fin de l'année, c'est-à-dire la probabilité que la durée de fonctionnement sans panne soit supérieure à 12 mois, soit la probabilité de l'évènement $\{X > 12\}$.
Donc on cherche à calculer $P_{X>6}(X > 12)$.
Or, X suit une loi exponentielle, donc d'après la propriété d'absence de mémoire,
$P_{X>6}(X > 12) = P_{X>6}(X > 6 + 6) = P(X > 6)$.
D'après la question précédente, $P(X > 6) \approx 0{,}549$.
Donc $P_{X>6}(X > 12) \approx 0{,}549$.
Ainsi, la probabilité que le distributeur ne connaisse aucune panne jusqu'à la fin de la première année, sachant qu'il n'en a pas connue pendant les six premiers mois, est environ égale à 0,549.

4. On sait que $P(X \leq t) = 1 - P(X > t)$, donc l'égalité $P(X > t) = 0{,}05$ est équivalente à l'égalité $P(X \leq t) = 1 - 0{,}05$, soit $P(X \leq t) = 0{,}95$.
De plus, X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}1$, donc $P(X \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}1t}$.
Donc l'égalité $P(X \leq t) = 0{,}95$ est équivalente à l'égalité $1 - \mathrm{e}^{-0{,}1t} = 0{,}95$,
soit $\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 0{,}05$.
Ceci équivaut à $-0{,}1t = \ln(0{,}05)$, soit $t = -\frac{\ln(0{,}05)}{0{,}1} \approx 30$.
C'est donc environ au bout de 30 mois, soit deux ans et demi, que le commerçant changera la machine.