73 **1. a.** Pour tout réel t, $f'(t) = -100a\pi\sin(100\pi t) + 100b\pi\cos(100\pi t)$.
b. $f(0) = 1$ donc $a = 1$.
$f'(0) = -100\pi$ donc $b = -1$.
c. D'après la question précédente, pour tout réel t, $f(t) = \cos(100\pi t) - \sin(100\pi t)$.
Les primitives sur $\mathbb{R}$ de f sont les fonctions de la forme

$t \longmapsto \frac{1}{100\pi}\sin(100\pi t) + \frac{1}{100\pi}\cos(100\pi t) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
En notant F celle qui s'annule en 0, $F(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{100\pi} + k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{100\pi}$.
Donc, pour tout réel t, $F(t) = \frac{1}{100\pi}\sin(100\pi t) + \frac{1}{100\pi}\cos(100\pi t) - \frac{1}{100\pi}$.

2. a. Pour tout réel t,
$f^2(t) = (\cos(100\pi t) - \sin(100\pi t))^2 = \cos^2(100\pi t) - 2\cos(100\pi t)\sin(100\pi t) + \sin^2(100\pi t)$
$f^2(t) = 1 - 2\cos(100\pi t)\sin(100\pi \mathrm{t})$.
b. Pour tout réel t,
$2\cos(100\pi t)\sin(100\pi t) = \frac{1}{100\pi} \times 2 \times 100\pi\cos(100\pi t)\sin(100\pi t) = \frac{1}{100\pi} \times 2u'(t)u(t)$, où $u(t) = \sin(100\pi t)$.
Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \longmapsto 2\cos(100\pi t)\sin(100\pi t)$ est $\frac{1}{100\pi}u^2$, soit
$t \longmapsto \frac{1}{100\pi}\sin^2(100\pi t)$.

On peut aussi écrire $2\cos(100\pi t)\sin(100\pi t) = -\frac{1}{100\pi} \times 2v'(t)v(t)$, où $v(t) = cos(100\pi t)$,
auquel cas une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \longmapsto 2\cos(100\pi t)\sin(100\pi t)$ est $-\frac{1}{100\pi}v^2$, soit
$t \longmapsto -\frac{1}{100\pi}\cos^2(100\pi t)$.
c. D'après ce qui précède, $G: t \longmapsto t - \frac{1}{100\pi}\sin^2(100\pi t)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f^2.
De plus, $G\left(\frac{1}{50}\right) = \frac{1}{50} - \frac{1}{100\pi}\sin^2\left(100\pi \times \frac{1}{50}\right) = \frac{1}{50} - \frac{1}{100\pi}\sin^2(2\pi) = \frac{1}{50} - 0 = \frac{1}{50}$ et $G(0) = 0$.
Donc $I^2 = 1$. Puisque $I \geq 0$, on en déduit que $I = 1$.
Avec $G: t \longmapsto t + \frac{1}{100\pi}\cos^2(100\pi t)$:

$$I^2 = 50\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{100\pi}\cos^2(2\pi) - 0 - \frac{1}{100\pi}\cos^2(0)\right) = 1$$