Sujet D

1.

```python
from math import*
def plant():
    t=0 ; y=0.1
    while y <= 1.95 :
        t=t+1
        y=2/(1+19*exp(-0.04*t))
    return t
```

2. On doit résoudre $\frac{2}{1+19\mathrm{e}^{-0,04t}} \geqslant 1,5$ qui est équivalente à $1 + 19\,\mathrm{e}^{-0,04t} \leqslant \frac{4}{3}$ ou encore à $\mathrm{e}^{-0,04t} \leqslant \frac{1}{57}$ ou encore $t \geqslant \frac{\ln\left(\frac{1}{57}\right)}{-0,04}$.

Comme $\frac{\ln\left(\frac{1}{57}\right)}{-0,04} \approx 101,1$, il faudra au minimum 102 jours pour que la hauteur du plant dépasse 1,5 m.

3. a. Pour tout t de l'intervalle [0 ; 250],

$$f'(t) = \frac{0 \times \left(1+19\mathrm{e}^{-0,04t}\right) - 2 \times 19 \times (-0,04)\mathrm{e}^{-0,04t}}{\left(1+19\mathrm{e}^{-0,04t}\right)^2} = \frac{-2 \times 19 \times (-0,04)\mathrm{e}^{-0,04t}}{\left(1+19\mathrm{e}^{-0,04t}\right)^2}$$

$$= \frac{1,52\mathrm{e}^{-0,04t}}{\left(1+19\mathrm{e}^{-0,04t}\right)^2}.$$

b. Comme la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f' est strictement positive sur [0 ; 250]. La fonction f est donc strictement croissante sur [0 ; 250].

4. a. Pour tout t de l'intervalle [0 ; 250],

$$f(t) = \frac{2}{1+19\mathrm{e}^{-0,04t}} = \frac{\mathrm{e}^{0,04t} \times 2}{\mathrm{e}^{0,04t} \times \left(1+19\mathrm{e}^{-0,04t}\right)} = \frac{2\,\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t} + 19 \times \mathrm{e}^{-0,04t} \times \mathrm{e}^{0,04t}}$$

$$= \frac{2\,\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t} + 19 \times \mathrm{e}^{-0,04t+0,04t}} = \frac{2\,\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t} + 19 \times \mathrm{e}^{0}} = \frac{2\,\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t} + 19}.$$

b. $F'(t) = 50 \times \frac{0,04\,\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}+19} = \frac{50 \times 0,04 \times \mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}+19} = f(t)$.

Donc F est une primitive de f sur [0 ; 250].

c. La valeur moyenne de f sur [50 ; 100] est égale à : $\frac{1}{100-50}\int_{50}^{100} f(t)\mathrm{d}t$.

Or $\frac{1}{100-50}\int_{50}^{100} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{50}\left(F(100) - F(50)\right)$

$$= \frac{1}{50}\left(50 \times \ln\left(\mathrm{e}^{0,04\times 100} + 19\right) - 50 \times \ln\left(\mathrm{e}^{0,04\times 50} + 19\right)\right)$$

$$= \ln\left(\mathrm{e}^4 + 19\right) - \ln\left(\mathrm{e}^2 + 19\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^4+19}{\mathrm{e}^2+19}\right) \approx 1,03.$$

La hauteur moyenne d'un plant de maïs ayant entre 50 et 100 jours de vie, est d'environ 1,03 m.