Sujet B

1. a. $y' + 0{,}12y = 0{,}003$ équivaut à $y' = -0{,}12y + 0{,}003$.
(E) est donc une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay + b$, avec $a = -0{,}12$ et $b = 0{,}003$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec a et b deux réels donnés, a non nul) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $t \longmapsto C\mathrm{e}^{at} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc la solution générale de l'équation différentielle (E) est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$y(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}12t} - \frac{0{,}003}{-0{,}12} = C\mathrm{e}^{-0{,}12t} + 0{,}025$, où $C \in \mathbb{R}$.

b. La fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) donc, d'après la question **1.a**, il existe une constante réelle C telle que $f(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}12t} + 0{,}025$ pour tout $t \geqslant 0$.
On sait qu'à l'instant $t = 0$, la concentration d'octane dans la cuve est égale à 0,5 mol·L^{-1}.
Cette condition initiale s'écrit $f(0) = 0{,}5$, soit $C\mathrm{e}^{-0{,}12\times 0} + 0{,}025 = 0{,}5$, ce qui donne $C = 0{,}475$. Par conséquent, $f(t) = 0{,}475\mathrm{e}^{-0{,}12t} + 0{,}025$ pour tout $t \geqslant 0$.

2. a. On sait que, k étant un nombre réel donné, la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{kx}$ est la fonction $x \longmapsto k\mathrm{e}^{kx}$.
Donc, pour tout $t \geqslant 0$, $f'(t) = 0{,}475 \times (-0{,}12) \times \mathrm{e}^{-0{,}12t} + 0$, soit $f'(t) = -0{,}057\mathrm{e}^{-0{,}12t}$.

b. Pour tout $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-0{,}12t} > 0$ et $-0{,}057 < 0$, donc par produit, $f'(t) < 0$. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

3. On cherche le temps t, en minutes, pour lequel la concentration en octane $f(t)$ est égale à 0,25 mol·L^{-1}. On résout alors sur $[0\,;+\infty[$ l'équation $f(t) = 0{,}25$,
soit $0{,}475\mathrm{e}^{-0{,}12t} + 0{,}025 = 0{,}25$, soit $\mathrm{e}^{-0{,}12t} = \frac{0{,}25-0{,}025}{0{,}475}$, soit $-0{,}12t = \ln\left(\frac{0{,}225}{0{,}475}\right)$,
soit $t = \frac{\ln\left(\frac{0{,}225}{0{,}475}\right)}{-0{,}12}$. Avec une calculatrice, $\frac{\ln\left(\frac{0{,}225}{0{,}475}\right)}{-0{,}12} \approx 6{,}23$.
La fonction f étant décroissante sur $[0;+\infty[$, on déduit donc qu'il faudra 7 min, à la minute près, pour obtenir une concentration en octane dans la cuve inférieure ou égale à 0,25 mol·L^{-1}.

4. a. $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}12t} = 0$ car $-0{,}12 < 0$, donc par produit, $\lim\limits_{t\to+\infty} (0{,}475\mathrm{e}^{-0{,}12t}) = 0$ et par somme, $\lim\limits_{t\to+\infty} (0{,}475\mathrm{e}^{-0{,}12t} + 0{,}025) = 0{,}025$, soit $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0{,}025$.
La concentration ne passera jamais au-dessous du seuil 0,025, tout en « s'en approchant ».
Même si on chauffe indéfiniment le mélange, il restera de l'octane non transformé dans la cuve.

b. 1 h correspond à 60 min et $f(60) \approx 0{,}0254$, ce qui est déjà proche de la concentration limite trouvée à la question **4.a**.
Le calcul $\frac{f(60)}{0{,}025} \approx 1{,}014$ donne $f(60) \approx 0{,}025 \times 1{,}014$, soit $f(60) \approx 0{,}025 \times \left(1 + \frac{1{,}4}{100}\right)$.
On voit donc que la concentration au bout d'une heure est égale à la concentration limite augmentée de seulement 1,4 % environ.
Il y a donc très peu d'intérêt à poursuivre le processus de transformation au-delà d'une heure.